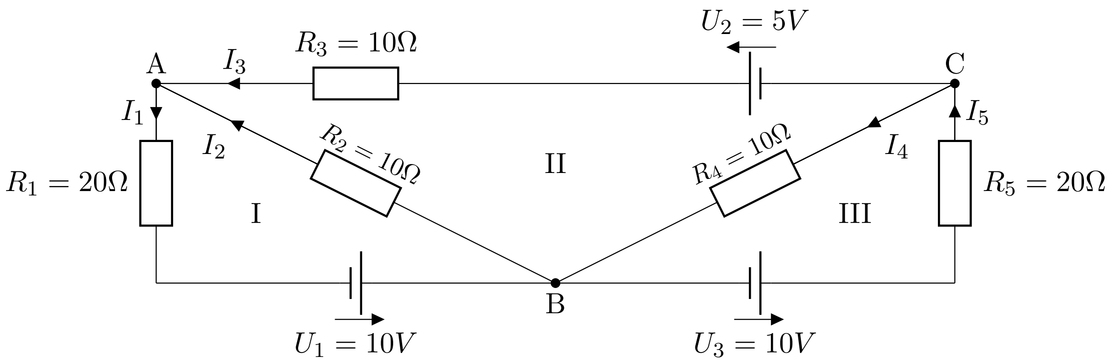
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme)**:**
Stellen Sie mit Hilfe der Kirchhoff'schen Gesetze ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Stromstärken des folgenden Stromkreises auf:



Lösung:
Wir stellen zunächst mit den Kirchhoff'schen Gesetzen die entsprechenden Gleichungen auf. Die Kontenregel liefert die folgenden drei Gleichungen:

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad \text{(Knoten A)}, \tag{1}$$
$$I_1 + I_4 = I_2 + I_5 \qquad \text{(Knoten B)}, \tag{2}$$
$$I_5 = I_3 + I_4 \qquad \text{(Knoten C)}. \tag{3}$$

Mit Hilfe der Maschenregel erhält man außerdem die Gleichungen:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_2 I_2 + R_1 I_1 && \text{(Masche I)},\\ U_2 &= R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_4 I_4 && \text{(Masche II)},\\ U_3 &= R_5 I_5 + R_4 I_4 && \text{(Masche III)}. \end{aligned}$$

In Matrix-Vektorschreibweise erhält man also nach dem Einsetzen der Werte für $R_1, \dots, R_5$, bzw. $U_1, \dots, U_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Anhand dieser Formulierung erkennt man schnell, dass die ersten drei Gleichungen aus der Knotenregel linear abhängig sind. Man erhält zum Beispiel die Gleichung (2) indem man von der Gleichung (1) die Gleichung (3) abzieht. Wir können also die redundante Gleichung (2) streichen. Damit erhalten wir das aus linear unabhängigen Gleichungen bestehende System:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Gauß-Algorithmus)**:**
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -20 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 10 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Wir lösen das obige Gleichungssystem indem wir es mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in ein äquivalentes System überführen, bei dem die Matrix obere Dreiecksgestalt hat.

Um dies zu erreichen, addieren wir zunächst das 20-fache der ersten Zeile zur zweiten. Das heißt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -20 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 10 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \urcorner \cdot 20 \\ \hookleftarrow + \\ \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -30 & -20 & 5 \\ 0 & -10 & 10 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \urcorner \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ \hookleftarrow + \end{array}.$$

Damit wurden in der ersten Spalte alle Einträge unterhalb der Diagonale eliminiert. Im nächsten Schritt wird das $\left(-\frac{1}{3}\right)$-fache der zweite Zeile zur dritten addiert, um den letzten Matrixeintrag der zweiten Spalte zu eliminieren. Dies liefert schließlich das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -30 & -20 \\ 0 & 0 & \frac{50}{3} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \frac{25}{3} \end{pmatrix}.$$

Rückwärtseinsetzen liefert nun die Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{25}{3} \cdot \frac{3}{50} = \frac{1}{2}, \\ x_2 &= -\frac{1}{30} \cdot \left(5 + 20 \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \\ x_1 &= \left(0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösung des gegeben linearen Gleichungssystem $x = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.