Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 2

Aufgabe 3 (LR-Zerlegung)**:**
Berechnen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 6 & 9 & -12 \\ -1 & 4 & 5 & -7 \\ 2 & -8 & -8 & 15 \end{pmatrix}$$

mit Spaltenpivotisierung, d.h. geben Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass gilt:

$$PA = LR.$$

Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (6, 9, 4, -3)^T$.
Hinweis: Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

Lösung:
Wir verwenden den Algorithmus aus der Vorlesung um eine LR-Zerlegung von A zu bestimmen. Wir notieren aber zusätzlich noch die Permutationsmatrizen $P_1, \ldots, P_3$ und die elementaren unteren Dreiecksmatrizen $L_1, \ldots, L_3$.

Vor dem Beginn des Algorithmus setzen wir zunächst $A^{(1)} := A$. Im ersten Schritt erfordert die Pivotsuche nach der ersten Spalte das Vertauschen der ersten beiden Zeilen. Daraus ergibt sich die Permutationsmatrix P_1 und die Matrix $\widetilde{A}^{(1)}$ durch:

$$P_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{A}^{(1)} := P_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & -12 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 5 & -7 \\ 2 & -8 & -8 & 15 \end{pmatrix} \quad \cdot(-\tfrac{1}{3}) \quad \cdot(-\tfrac{1}{3}) \quad \cdot\tfrac{2}{3} \quad + \quad + \quad + .$$

Im anschließenden Eliminationsschritt wird nun die die erste Zeile mit $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{1}{3}$ multipliziert und zur zweiten Zeile addiert. Entsprechend erfolgt die restliche Elimination in der ersten Spalte. Dieses Vorgehen liefert uns direkt die gesuchte Matrix L_1 und die Ausgangsmatrix $A^{(2)}$ für den zweiten Schritt:

$$L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{(2)} := L_1 \widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & -12 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die erneute Pivotsuche, jetzt aber nach der zweiten Spalte, verlangt das Vertauschen der zweiten und vierten Zeile von $A^{(2)}$. Diese Vertauschung liefert gerade die (Links-)Multiplikation mit der

Permutationsmatrix P_2:

$$P_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{A}^{(2)} := P_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & -12 \\ 0 & -4 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Elimination in der zweiten Spalte erfolgt analog zu der in der ersten und liefert die Matrizen:

$$L_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{(3)} := L_2 \widetilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & -12 \\ 0 & -4 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

Im letzten Schritt muss keine Zeile mehr vertauscht werden. Daher ist die Permutationsmatrix P_3 durch die Einheitsmatrix gegeben und es gilt $\widetilde{A}^{(3)} := P_3 A^{(3)} = A^{(3)}$. Der letzte Eliminationsschritt erfordert schließlich noch das Addieren der negativen dritten Zeile zur vierten. Damit erhält man also:

$$L_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{(4)} := L_3 \widetilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & -12 \\ 0 & -4 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Damit ist der Algorithmus beendet. Fassen wir alle Schritte zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} A^{(4)} &= L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A \\ &= L_3 (P_3 L_2 P_3)(P_3 P_2 L_1 P_2 P_3)(P_3 P_2 P_1) A \\ &= L_3 L_2 \underbrace{(P_2 L_1 P_2)}_{=:\widetilde{L}_1} \underbrace{(P_2 P_1)}_{=:P} A \end{aligned}$$

Umstellen liefert nun:

$$PA = \underbrace{\widetilde{L}_1^{-1} {L_2}^{-1} {L_3}^{-1}}_{=:L} \underbrace{A^{(4)}}_{=:R}$$

Die gesuchten Matrizen sind also wie folgt gegeben:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Zum Schluss soll noch das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ gelöst werden. Mit Hilfe der LR-Zerlegung erhält man zunächst

$$LRx = PAx = Pb.$$

Mit $y := Rx$ müssen wir also das lineare Gleichungssystem $Ly = Pb$ lösen, d.h. wir suchen $y \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Durch Vorwärtseinsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 9,\\
y_2 &= -3 + \frac{2}{3} \cdot 9 = 3,\\
y_3 &= 4 - \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2},\\
y_4 &= 6 - \frac{1}{3} \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 9 - 1 \cdot \frac{5}{2} = -1.
\end{aligned}$$

Schließlich lässt sich die gesuchte Lösung $x \in \mathbb{R}^4$ durch dass lineare Gleichungssystem $Rx = y$ bestimmen. Wir lösen also

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & -12 \\ 0 & -4 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ \frac{5}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned}
x_4 &= 1,\\
x_3 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 = 2,\\
x_2 &= \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (3 + 2 \cdot 2 - 7 \cdot 1) = 0,\\
x_1 &= \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (9 - 5 \cdot 0 - 9 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = -1.
\end{aligned}$$

Also ist die Lösung des linearen Gleicungssystems durch $x = (-1, 0, 2, 1)^T$ gegeben.

Aufgabe 4 (Matlab, LR-Zerlegung)**:**
In dieser Aufgabe soll ein Programm zum Lösen eines linearen Gleichungsystems mit Hilfe einer LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung erarbeitet werden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Schreiben Sie zunächst ein Programm, dass eine LR-Zerlegung für eine Matrix A mit Spaltenpivotisierung berechnet. Verwenden Sie bei der Bestimmung des Pivotelements die Normierung mit der Zeilensumme, d.h. im ν-ten Schritt ist das Pivotelement $a_{\mu\nu}^{(\nu)}$, $\mu \in \{\nu, \ldots, m\}$ jetzt durch

$$\frac{\left|a_{\mu\nu}^{(\nu)}\right|}{\sum_{k=1}^{m} \left|a_{\mu k}^{(\nu)}\right|} = \max_{\nu \le i \le m} \frac{\left|a_{i\nu}^{(\nu)}\right|}{\sum_{k=1}^{m} \left|a_{ik}^{(\nu)}\right|}$$

gegeben (vgl. Algorithmus 1.6).

(ii) Berechnen Sie nun mit Ihrem Programm für die Matrix A aus Aufgabe 3 eine LR-Zerlegung. Was fällt Ihnen auf?

(iii) Schreiben Sie weiter ein Programm zur Lösung eines linearen Gleichungssystems, welches die eben berechnete LR-Zerlegung verwendet.

(iv) Testen Sie Ihr Programm anhand des linearen Gleichungssystems aus Aufgabe 2 und berechnen Sie außerdem die Stromstärken $I_1, \ldots, I_5$ des Stromkreises aus Aufgabe 1. Verifizieren Sie außerdem Ihre Lösung des linearen Gleichungssystems aus Aufgabe 3.

Lösung:
Eine mögliche Umsetzung in ein Matlab-Programm finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

Per Hand lässt sich das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 1 mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen *(Hinweis: Dieser Lösungsweg war in dieser Aufgabe nicht gefordert und dient lediglich als Ergänzung)*:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\left(-\frac{1}{20}\right) \\ \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\left(-\frac{3}{20}\right) \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\left(-\frac{2}{5}\right) \\ + \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 & 10 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\frac{8}{50} \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{21}{5} & \frac{21}{10} \end{array}\right).$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir schließlich die Lösung des linearen Gleichungssystems und damit die gesuchten Stromstärken:

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{21}{10} \cdot \frac{5}{21} = \frac{1}{2} \\ I_4 &= \frac{1}{10} \cdot \left(10 - 20 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0 \\ I_3 &= -\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \cdot 0\right) = \frac{1}{2} \\ I_2 &= -\frac{1}{2} \cdot \left(5 + 10 \cdot 0 - 10 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0 \\ I_1 &= \frac{1}{20} \cdot (10 - 10 \cdot 0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet also $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$.