Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 3

Cholesky-Zerlegung einer positiv definiten, hermiteschen Matrix

Für eine positv definite, hermitesche Matrix A kann der Gauß-Algorithmus “symmetrisch” durchgeführt werden. Wir erhalten dadurch eine Zerlegung in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix L mit ihrer konjugiert-transponierten, die sogenannte Cholesky-Zerlegung

$$A = LL^H.$$

Komponentenweise heißt das zunächst:

$$a_{ik} = \sum_{\mu=1}^{m} l_{i\mu}\overline{l_{k\mu}} \quad (i,k = 1,\dots,m),$$

wobei mit l_{ik} $(i = 1,\dots,m,\ k = 1,\dots,i)$ die Einträge der Matrix L bezeichnet werden. Wegen der Dreieicksgestalt von L ergibt sich schließlich:

$$a_{ik} = \sum_{\mu=1}^{\min\{i,k\}} l_{i\mu}\overline{l_{k\mu}} \quad (i,k = 1,\dots,m).$$

Dies liefert den folgenden Algorithmus zur Berechnung einer Cholesky-Zerlegung (siehe Vorlesung):

Für $i = 1,\dots,m$:

1. *Für $k = 1,\dots,i-1$ berechne*

$$l_{ik} := \frac{1}{l_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{\mu=1}^{k-1} l_{i\mu}\overline{l_{k\mu}}\right).$$

2. *Berechne*

$$l_{ii} := \sqrt{a_{ii} - \sum_{\mu=1}^{i-1} |l_{i\mu}|^2}.$$

Aufgabe 5 (Matlab, Cholesky-Zerlegung)**:**

(i) Schreiben Sie auf der Grundlage des obigen Algorithmus ein Programm das zu einer gegebenen positiv definiten, hermitschen Matrix A eine Cholesky-Zerlegung berechnet.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihres Programms aus (i) eine Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -15 & 3 \\ 6 & 5 & -12 & 2 \\ -15 & -12 & 45 & -13 \\ 3 & 2 & -13 & 6 \end{pmatrix}.$$

(iii) Schreiben Sie ein weiteres Programm zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, das auf Ihr Programm aus (i) zurückgreift.

(iv) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit A aus (ii) und

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

numerisch mit Hilfe Ihres Programms aus (iii).

Lösung:

(i) Eine mögliche Programmumsetzung findet man auf der Vorlesungshomepage.

(ii) Eine Cholesky-Zerlegung von A lässt mit dem Verfahren aus dem Vorlesungsskript auch per Hand ausrechnen *(Hinweis: Dieser Rechenweg war nicht Teil der Übungsaufgabe, sondern gilt als Ergänzung)*. Zunächst setzen wir $A^{(1)} := A$. Im ersten Schritt eliminieren wir in der ersten Spalte und der ersten Zeile. Dafür definieren wir die Matrix L_1:

$$L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{(2)} := L_1 A^{(1)} L_1^H = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt werden nun in $A^{(2)}$ die zweite Zeile und Spalte eliminiert:

$$L_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{(3)} := L_2 A^{(2)} L_2^H = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Im letzten Schritt lautet die Elimination schließlich:

$$L_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{(4)} := L_3 A^{(3)} L_3^H = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:D}.$$

Zur Berechung von L benötigen wir noch die Matrix

$$\sqrt{D} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich nun die gesuchte untere Dreiecksmatrix L bestimmen. Es gilt zunächst:

$$D = L_3 L_2 L_1 A L_1^H L_2^H L_3^H.$$

Damit erhält man schließlich die gesuchte Zerlegung:

$$\begin{aligned} A &= L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D} \sqrt{D} \big(L_3^H\big)^{-1} \big(L_2^H\big)^{-1} \big(L_1^H\big)^{-1} \\ &= L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D} \sqrt{D} \big(L_3^{-1}\big)^H \big(L_2^{-1}\big)^H \big(L_1^{-1}\big)^H \\ &= \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D}}_{=:L} \Big(L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D}\Big)^H \\ &= L L^H. \end{aligned}$$

Es ist also

$$L := L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Einen Programmvorschlag findet man auf der Vorlesungshomepage.

(iv) Durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen erhält man die folgende Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$x = (1, -1, 0, -1)^T.$$

Aufgabe 6 (von-Mises Iteration)**:**
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die ersten drei Schritte der von-Mises Iteration mit dem Startvektor $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ und geben Sie eine grobe Näherung für den größten Eigenwert von A an.

Lösung:
Wir berechnen die ersten drei Schritte der von-Mises Iteration anhand des Algorithmus aus der Vorlesung. Im ersten Schritt wird zunächst der Vektor

$$z^{(1)} := A x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

berechnet. Anschließend erfolgt die Normierung, das heißt wir berechnen i_1 anhand der Bedingung $\left|z_{i_1}^{(1)}\right| = \max\limits_{1\leq j\leq m} \left|z_j^{(1)}\right|$, also $i_1 = 2$, und erhalten

$$x^{(1)} := \frac{z^{(1)}}{z_{i_1}^{(1)}} = \frac{z^{(1)}}{z_2^{(1)}} = \frac{z^{(1)}}{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Iterationsschritt erhalten wir zunächst durch analoges Vorgehen:

$$z^{(2)} := Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Index i_2 wird analog zum ersten Schritt über $\left|z_{i_2}^{(2)}\right| = \max\limits_{1\leq j\leq m} \left|z_j^{(2)}\right|$ bestimmt, lautet also $i_2 = 1$. Wir berechnen somit

$$x^{(2)} := \frac{z^{(2)}}{z_{i_2}^{(2)}} = \frac{z^{(2)}}{\frac{4}{3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der dritte Iterationsschritt lautet schließlich:

$$z^{(3)} := Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x^{(3)} := \frac{z^{(3)}}{z_{i_3}^{(3)}} = \frac{z^{(3)}}{\frac{9}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Jetzt können wir die gesuchte Approximation $\tilde{\lambda}_{\max}$ an den größten Eigenwert von A wegen der Konvergenz $z_{i_k}^{(k+1)} \to \lambda_{\max}$ $(k \to \infty)$ (siehe Vorlesung) ablesen:

$$\tilde{\lambda}_{\max} = z_{i_2}^{(3)} = z_1^{(3)} = \frac{3}{2}.$$