Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 4

Das LR-Verfahren für Eigenwertprobleme

Für die Matrix $A =: A_1$ seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1. A sei diagonalisierbar, d.h. es gebe eine Matrix T mit
$$A = T\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)T^{-1},$$
wobei für T und T^{-1} LR-Zerlegungen (ohne Zeilenvertauschungen) existieren mögen.
2. Die Eigenwerte von A lassen sich betragsmäßig ordnen:
$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_m| > 0.$$
3. Das LR-Verfahren (ohne Zeilenvertauschungen)
$$A_k =: L_k R_k, \quad A_{k+1} := R_k L_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$
sei durchführbar, d.h in jedem Schritt k möge eine LR-Zerlegung der Matrix A_k existieren.

Dann gilt (was hier nicht bewiesen werden soll):

(i)
$$\lim_{k\to\infty} R_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

(ii) $\lim_{k\to\infty} L_k = E.$

Aufgabe 7 (Matlab, LR-Verfahren für Eigenwertprobleme)**:**

(i) Schreiben Sie ein Programm welches das oben beschriebene LR-Verfahren für Eigenwertprobleme numerisch realisiert. Verwenden Sie hierfür ein Programm für eine LR-Zerlegung analog zu Aufgabe 4, aber ohne Pivotisierung. Brechen Sie die Iteration ab, wenn alle Einträge der Matrix L_k unterhalb der Diagonalen betragsmäßig unterhalb einer gewissen Toleranz ε liegen, d.h. falls

$$\max\left\{\left|\left(L_k\right)_{ij}\right| : i = 2, \dots, m,\ j = 1, \dots, i-1\right\} < \varepsilon$$

erfüllt ist.

(ii) Berechnen Sie nun mit Ihrem Programm approximative Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -7 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(i) Einen Programmvorschlag finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

(ii) Ergebnisse des Programms auf der Homepage:

ε	$\tilde\lambda_1$	$\tilde\lambda_2$	$\tilde\lambda_3$	Iterationsschritte
5,0e-1	$\approx 3{,}0506$	$\approx 2{,}0251$	$\approx 0{,}9242$	4
2,5e-1	$\approx 3{,}0055$	$\approx 2{,}0113$	$\approx 0{,}9832$	6
1,0e-1	$\approx 3{,}0006$	$\approx 2{,}0034$	$\approx 0{,}9960$	8
1,0e-2	$\approx 3{,}0000$	$\approx 2{,}0001$	$\approx 0{,}9999$	14
1,0e-3	$\approx 3{,}0000$	$\approx 2{,}0000$	$\approx 1{,}0000$	20

Aufgabe 8 (Inverse Iteration von Wieland)**:**
Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

sowie eine grobe Approximation $\tilde\lambda = 3$ an den zweiten Eigenwert von B. Berechnen Sie mit Hilfe der Inversen Iteration von Wieland eine verbesserte Approximation $\tilde\lambda_2$ für den zweiten Eigenwert (vgl. Skript S. 34: Praktischer Nutzen der inversen Iteration). Verwenden Sie den Startvektor $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ und führen Sie drei Iterationsschritte durch.
Hinweis: Sie dürfen hier zum Lösen der auftretenden linearen Gleichungssysteme geeignete Hilfsmittel verwenden, z.B. den Matlab-Befehl $A\backslash b$ zum Lösen linearer Gleichungssysteme.

Lösung:
Nach dem Algorithmus aus dem Vorlesungsskript müssen wir im ersten Schritt zunächst das lineare Gleichungssystem $(B - \tilde\lambda E)z^{(1)} = x^{(0)}$ lösen. Matlab liefert uns

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Der Index i_1 für die Normierung kann in diesem Fall als $i_1 = 1$ gewählt werden. Damit erhalten wir

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt lösen wir das lineare Gleichungssystem $(B - \tilde{\lambda}E)z^{(2)} = x^{(1)}$ und erhalten

$$z^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

sowie nach der Normierung mit Hilfe von $i_2 = 2$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der dritte Iterationsschritt liefert schließlich

$$z^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir nun eine bessere Näherung für den zweiten Eigenwert von B:

$$\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda} + \frac{1}{z_{i_2}^{(3)}} = \tilde{\lambda} + \frac{1}{z_2^{(3)}} = 3 + \frac{1}{\frac{7}{6}} = \frac{27}{7} \approx 3{,}86.$$

Aufgabe 9 (Simplex-Algorithmus)**:**
Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 6x_2 - 40$ mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 2x_1 & +6x_2 \geq -80 \\ -x_1 & -8x_2 \geq 0 \\ -3x_1 & +10x_2 \leq -230 \end{cases}, \quad x_1 \leq 50, \quad 2x_2 \geq -20.$$

(i) Bringen Sie das obige Problem zunächst auf Normalform indem Sie die Transformation

$$x_1 = 50 - \tilde{x}_1, \quad x_2 = \frac{1}{2}\tilde{x}_2 - 10$$

verwenden, d.h. bestimmen Sie eine Funktion $\tilde{Z}$ mit $\tilde{Z}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = Z(x_1, x_2)$ und schreiben Sie die Nebenbedingungen mit Hilfe der Transformation um.

(ii) Berechnen Sie nun mit Hilfe des Simplex-Algorithmus eine optimale Basislösung für die Zielfunktion $\tilde{Z}$ unter den transformierten Nebenbedingungen aus (i).

(iii) Führen Sie nun die entsprechende Rücktransformation aus und geben Sie eine optimale Basislösung für die Zielfunktion Z an. Berechnen Sie außerdem den optimalen Wert von Z.

Lösung:

(i) Wir bringen das Problem zunächst mit Hilfe der angegeben Transformation auf Normalform. Die neue Zielfunktion ist dann gegeben durch

$$\tilde{Z}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 2 \cdot (50 - \tilde{x}_1) + 5 \cdot (\frac{1}{2}\tilde{x}_2 - 10) - 40 = -2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2.$$

Die Nebenbedingungen lauten nach der Transformation:

$$\begin{cases} 2\tilde{x}_1 & -3\tilde{x}_2 & \leq 120 \\ -\tilde{x}_1 & +4\tilde{x}_2 & \leq 30 \\ 3\tilde{x}_1 & +5\tilde{x}_2 & \leq 20 \end{cases}, \quad \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0.$$

Die Transformation ist so gewählt, dass automatisch $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0$ gilt.

(ii) Auf das transformierte Problem können wir nun den Simplex-Algorithmus anwenden. Wir erstellen als erstes das zugehörige Ausgangstableau:

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	
y_1	2	-3	1	0	0	120
y_2	-1	4	0	1	0	30
y_3	3	$\boxed{5}$	0	0	1	20
	2	-3	0	0	0	0

.

-3 ist der einzige negative Wert in der Zielfunktionszeile und daher ist die zweite Spalte die Pivotspalte. Wegen $\frac{b_2}{a_{22}} = \frac{30}{4} > \frac{20}{5} = \frac{b_3}{a_{32}}$ ist die dritte Zeile die Pivotzeile. Wir erhalten somit nach der Elimination das Tableau:

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	
y_1	$\frac{19}{5}$	0	1	0	$\frac{3}{5}$	132
y_2	$-\frac{17}{5}$	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	14
$\tilde{x}_2$	$\frac{3}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	4
	$\frac{19}{5}$	0	0	0	$\frac{3}{5}$	12

.

Da in der Zielfunktionszeile nur noch positive Einträge stehen, ist der Algorithmus an dieser Stelle beendet. $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (0, 4)$ ist eine optimale Basislösung mit optimalem Wert $\tilde{Z}(0, 4) = 12$.

(iii) Rücktransformation zu den ursprünglichen Variablen liefert schließlich die optimale Basislösung $(x_1, x_2) = (50, -8)$ und den optimalen Wert $Z(50, -8) = 12$.