Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 5

Aufgabe 10 (2-Phasen-Methode, Simplex-Algorithmus)**:**
Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$ mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} \quad x_1 & +x_2 \leq 16 \\ -x_1 & -x_2 \leq -4 \\ -3x_1 & -x_2 \leq -6 \\ -2x_1 & +x_2 \geq -16 \end{cases} \quad , \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Verwenden Sie die 2-Phasen-Methode um dieses lineare Optimierungsproblem zu lösen.

(i) *1.Phase:* Berechnen Sie zunächst eine zulässige Basislösung für das gegebene Problem.

(ii) *2.Phase:* Bestimmen Sie ausgehend von dieser Lösung eine optimale Basislösung für die Zielfunktion Z und geben Sie außerdem den optimalen Wert an.

Lösungen:
Bei diesem Problem können wir nicht wie gewohnt den Simplex-Algorithmus mit dem Ursprung als zulässige Basislösung starten. Wir wenden deshalb die 2-Phasen-Methode an um zunächst eine zulässige Basislösung zu finden, mit der dann der eigentliche Simplex-Algorithmus gestartet wird. Die folgende Abbildung veranschaulicht nochmals die möglichen Basislösungen, wobei der Ursprung nicht enthalten ist.

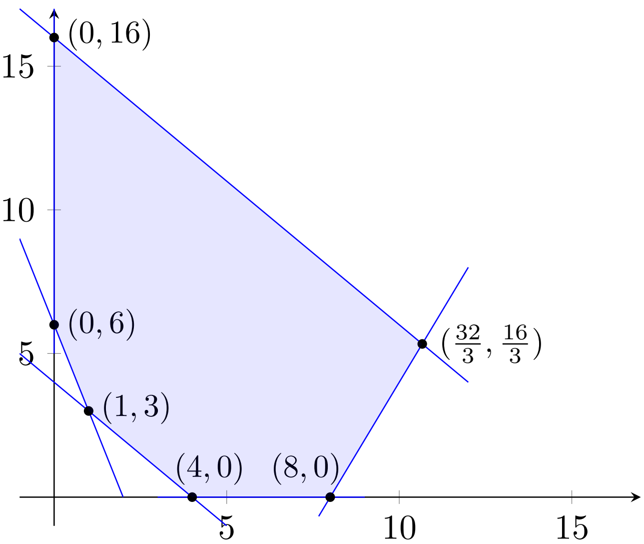

Abbildung 1: Visualisierung des zulässigen Bereiches

(i) Wir führen dafür zwei künstliche Variablen k_1 und k_2 ein und erhalten das Ausgangstableau mit den Basisvariablen y_1, y_4, k_1, k_2:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	k_1	k_2	
y_1	1	1	1	0	0	0	0	0	16
k_1	-1	-1	0	1	0	0	-1	0	-4
k_2	-3	-1	0	0	1	0	0	-1	-6
y_4	2	-1	0	0	0	1	0	0	16
	0	0	0	0	0	0	1	1	0

.

Wir maximieren nun die Hilfszielfunktion $z^*(k_1, k_2) = -k_1 - k_2$. Da diese aber noch von den Basisvariablen k_1 und k_2 abhängt, eliminieren wir die Einträge in der Zielfunktionszeile durch geeignete Zeilenoperationen und erhalten:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	k_1	k_2	
y_1	1	1	1	0	0	0	0	0	16
k_1	-1	-1	0	1	0	0	-1	0	-4
k_2	$\boxed{-3}$	-1	0	0	1	0	0	-1	-6
y_4	2	-1	0	0	0	1	0	0	16
	-4	-2	0	1	1	0	0	0	-10

.

Im Folgenden maximieren wir die Hilfszielfunktion $z^*(x_1, x_2, y_2, y_3)$ mit dem üblichen Simplex-Algorithmus. Im ersten Schritt erhalten wir das Tableau

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	k_1	k_2	
y_1	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	14
k_1	0	$\boxed{-\frac{2}{3}}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	-2
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	2
y_4	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	12
	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	-2

und im zweiten Schritt

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	k_1	k_2	
y_1	0	0	1	1	0	0	-1	0	12
x_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y_4	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	17
	0	0	0	0	0	0	1	1	0

.

Daraus können wir schließlich die zulässige Basislösung

$$(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, k_1, k_2) = (1, 3, 12, 0, 0, 17, 0, 0)$$

ablesen (vgl. Abbildung 1). Außerdem sind k_1 und k_2 keine Basisvariablen mehr.

(ii) Nun sind wir in der Lage den Simplex-Algorithmus für die ursprüngliche Zielfunktion Z ausgehend von dieser Basislösung durchzuführen. Wir streichen die künstlichen Variablen und erhalten das Tableau:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
y_1	0	0	1	1	0	0	12
x_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
y_4	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	17
	1	2	0	0	0	0	0

.

Da die Zielfunktion Z noch von den Basisvariablen x_1 und x_2 abhängt führen wir wieder geeignete Zeilenumformung durch und erhalten:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
y_1	0	0	1	1	0	0	12
x_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
y_4	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	17
	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-7

.

Erneutes Durchführen des Simplex-Algorithmus liefert:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
y_1	0	0	1	1	0	0	12
y_3	0	2	0	-3	1	0	6
x_1	1	1	0	-1	0	0	4
y_4	0	-3	0	2	0	1	8
	0	1	0	1	0	0	-4

.

Im letzten Tableau lesen wir nun die optimale Basislösung

$$(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4) = (4, 0, 12, 0, 6, 8)$$

ab, d.h. $(x_1, x_2) = (4, 0)$. Der optimale Wert beträgt $Z(4, 0) = -4$.

Aufgabe 11 (Konditionszahl)**:**

(i) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

die Konditionszahl bezüglich der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ und der Spaltensummennorm $\|\cdot\|_1$, d.h. berechnen Sie $\mathrm{cond}_\infty(A)$ und $\mathrm{cond}_1(A)$.
Hinweis: Für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ lässt sich die der jeweiligen Norm $\|\cdot\|_\infty$, bzw. $\|\cdot\|_1$ zugeordnete Matrixnorm folgt berechnen:

$$\|B\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |b_{ij}|\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \|B\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}|\,.$$

(Können Sie das beweisen?)

(ii) Bestimmen Sie Diagonalmatrizen D_∞, bzw. D_1, sodass die Betragssummen aller Zeilen von $D_\infty A$, bzw. aller Spalten von AD_1 den Wert 1 haben und berechnen Sie die Konditionszahlen der Matrizen $D_\infty A$ und AD_1.

(iii) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit A aus (i). Weiter sei Δb eine Störung der rechten Seite. Wie groß ist der relative Fehler der Lösung bezüglich der Spaltensummennorm höchstens, wenn der relative Fehler der Störung Δb höchstens 10^{-4} beträgt?

(iv) Betrachten Sie nun das vorkonditionierte Gleichungssystem $AD_1 y = b$ mit $y := {D_1}^{-1}x$ und berechnen Sie analog zu Aufgabe (iii) eine Schranke für den relativen Fehler der Lösung y bezüglich der Spaltensummennorm, wenn der relative Fehler der Störung wieder höchstens 10^{-4} beträgt. Was fällt Ihnen auf?

Lösungen:

(i) Wir berechnen zunächst die Inverse von A mit der Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir nun die gesuchten Konditionszahlen

$$\begin{aligned}\operatorname{cond}_\infty(A) &= \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 11 \cdot 13 = 143\\ \operatorname{cond}_1(A) &= \|A\|_1 \left\|A^{-1}\right\|_1 = 13 \cdot 11 = 143\end{aligned}$$

(ii) Um die Matrix D_∞ definieren zu können berechnen wir zunächst die betragsmäßigen Zeilensummen von A:

$$s_1 = \sum_{j=1}^{2} |a_{1j}| = 11 \quad \text{und} \quad s_2 = \sum_{j=1}^{2} |a_{2j}| = 5.$$

$D_\infty := \operatorname{diag}(\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2})$ hat die geforderte Eigenschaft, denn es gilt

$$D_\infty A = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{9}{11} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix D_1 gehen wir entsprechend vor, summieren aber jetzt die Spalten

$$t_1 = \sum_{i=1}^{2} |a_{i1}| = 3 \quad \text{und} \quad t_2 = \sum_{i=1}^{2} |a_{i2}| = 13.$$

und erhalten somit $D_1 := \operatorname{diag}(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2})$ und damit

$$AD_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{9}{13} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}.$$

Zum Schluss berechnen wir noch die beiden Konditionszahlen:

$$\operatorname{cond}_\infty(D_\infty A) = \underbrace{\|D_\infty A\|_\infty}_{=1} \left\|(D_\infty A)^{-1}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} -44 & 45 \\ 11 & -10 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 89,$$

$$\operatorname{cond}_1(AD_1) = \underbrace{\|AD_1\|_1}_{=1} \left\|(AD_1)^{-1}\right\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} -12 & 27 \\ 13 & -26 \end{pmatrix}\right\|_1 = 53.$$

(iii) Wir verwenden die Abschätzung für den relativen Fehler aus der Vorlesung

$$\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \leq \mathrm{cond}_1(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1}.$$

Mit der in (i) berechneten Konditionszahl gilt also für den relativen Fehler der Lösung

$$\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \leq 143 \cdot 10^{-4} = 1{,}43 \cdot 10^{-2}.$$

(iv) Analog zu (iii) erhalten wir die Fehlerabschätzung

$$\frac{\|\Delta y\|_1}{\|y\|_1} \leq 53 \cdot 10^{-4} = 5{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Man erkennt, dass beim vorkonditionierten System die obere Schranke für den relativen Fehler kleiner als beim ursprünglichen System ist.