Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 7

Aufgabe 15 (Quadratur)**:**
Zeigen Sie, dass die Quadraturformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{q=0}^{n} \alpha_q f(x_q) + R(f)$$

mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ und dem Quadraturfehler $R(f)$ genau dann für alle Polynome vom Grad $\leq m$ exakt ist, wenn sie für die Monome $p_0, \ldots, p_m$ exakt ist.
Hinweis: Das Monom p_k ist gegeben durch $p_k(x) = x^k$.

Lösung:
Wenn die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad $\leq m$ exakt ist, dann insbesondere auch für die Monome $p_0, \ldots, p_m$.

Sei nun die Quadraturformel für die Monome $p_0, \ldots, p_m$ exakt. Dann gilt für ein beliebiges Polynom $p = \sum_{i=0}^m a_i p_i$:

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{m} a_i \int_a^b p_i(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{q=0}^{n} \alpha_q p_i(x_q) \\ &= \sum_{q=0}^{n} \alpha_q \sum_{i=0}^{m} a_i p_i(x_q) \\ &= \sum_{q=0}^{n} \alpha_q p(x_q).\end{aligned}$$

Damit ist die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad $\leq m$ exakt.

Aufgabe 16 (Quadratur)**:**
Gegeben sei das Integral

$$\int_2^6 \frac{1}{x \ln(x)}\,dx, \tag{$*$}$$

dessen exakter Wert $\ln(\ln 6) - \ln(\ln 2) \approx 0{,}95$ beträgt.

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Sehnentrapezregel zur Schrittweite $h = 1$ eine Näherung für das gegebene Integral und geben Sie den absoluten Fehler an.

(ii) Gegeben sei die Quadraturformel

$$\int_2^6 f(x)\,dx = \alpha_0 f(2) + \alpha_1 f(4) + \alpha_2 f(6) + R(f)$$

mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. $R(f)$ bezeichne den Fehler der Quadratur. Bestimmen Sie die Konstanten α_0, α_1 und α_2 so, dass die Quadraturformel für Polynome vom Grad ≤ 2 exakt ist und berechnen Sie damit eine Näherung für das Integral $(*)$. Geben Sie außerdem den absoluten Fehler an.

Lösung:

(i) Mit der zusammengesetzten Sehnentrapezregel berechnet man mit $g(x) := \frac{1}{x\ln(x)}$ die folgende Approximation für das obige Integral:

$$\int_2^6 \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \approx 1 \cdot \left(\frac{1}{2}g(2) + g(3) + g(4) + g(5) + \frac{1}{2}g(6)\right) \approx 1{,}02.$$

Der absolute Fehler beträgt also ungefähr $|0{,}95 - 1{,}02| = 0{,}07$.

(ii) Damit die Quadraturformel für Polynome von Grad ≤ 2 exakt ist, genügt es nach Aufgabe 15 die Exaktheit für die Monome p_0, p_1 und p_2 zu fordern. Daraus erhält man das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 &= \alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \frac{52}{3} &= \alpha_0 + 4\alpha_1 + 9\alpha_2 \end{aligned}$$

Lösen dieses Gleichungssystems liefert die Quadraturgewichte $\alpha_0 = \frac{2}{3}$, $\alpha_1 = \frac{8}{3}$ und $\alpha_2 = \frac{2}{3}$. Das ist gerade die Simpson-Regel auf einem Intervall der Länge 4.

Damit erhält man die folgende Approximation für obiges Integral

$$\int_2^6 \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \approx \frac{2}{3}g(2) + \frac{8}{3}g(4) + \frac{2}{3}g(6) \approx 1{,}02.$$

Der absolute Quadraturfehler beträgt also wieder etwa $|0{,}95 - 1{,}02| = 0{,}07$.

Aufgabe 17 (Anfangswertproblem)**:**
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 1 - t^2 y(t), \quad y(0) = 0. \tag{$**$}$$

(i) Formulieren Sie für das Anfangswertproblem $(**)$ das Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie damit eine Näherung für $y(1)$.

(ii) Formulieren Sie für das Anfangswertproblem $(**)$ das 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit $\beta = \frac{1}{2}$ zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie damit eine Näherung für $y(1)$.

Lösung:

(i) Für das Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ benötigen wir die Stellen $t^{(i)} := \frac{i}{2}$. Mit dem Anfangswert $y^{(0)} = y(0) = 0$ erhalten wir:

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + hf(t^{(i)}, y^{(i)}) = y^{(i)} + \frac{1}{2}\left(1 - {t^{(i)}}^2 y^{(i)}\right) \quad (i \geq 0).$$

Damit berechnen wir schließlich

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= 0 + \frac{1}{2}(1 - 0^2 \cdot 0) = \frac{1}{2}, \\ y^{(2)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16} \approx 0{,}94. \end{aligned}$$

Damit haben wir die gesuchte Approximation für $y(1)$ gefunden, nämlich $y^{(2)} = \frac{15}{16} \approx 0{,}94$.

(ii) Das Verfahren von Heun lautet:

$$\begin{aligned} y^{(i+1)} &= y^{(i)} + \frac{h}{2}\left[f(t^{(i)}, y^{(i)}) + f\left(t^{(i)} + h, y^{(i)} + hf(t^{(i)}, y^{(i)})\right)\right] \\ &= y^{(i)} + \frac{1}{4}\left[2 - {t^{(i)}}^2 y^{(i)} - (t^{(i)} + \tfrac{1}{2})^2 \left(y^{(i)} + \frac{1}{2}(1 - {t^{(i)}}^2 y^{(i)})\right)\right]. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Approximationen:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= 0 + \frac{1}{4}\left[2 - 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(0 + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{15}{32} \approx 0{,}47, \\ y^{(2)} &= \frac{15}{32} + \frac{1}{4}\left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{15}{32} - 1^2 \left(\frac{15}{32} + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{15}{32}\right]\right)\right] = \frac{729}{1024} \approx 0{,}71 \end{aligned}$$

und somit die gesuchte Approximation $y^{(2)} = \frac{729}{1024} \approx 0{,}71$.

Aufgabe 18 (Anfangswertproblem, Matlab)**:**

(i) Stellen Sie die Verfahrensfunktion für das klassische Runge-Kutta-Verfahren (siehe S. 95 im Skript) auf.

(ii) Schreiben Sie ein Matlab-Programm welches das klassische Runge-Kutta Verfahren numerisch umsetzt. Dabei soll das Verfahren nach Schritt $i_{\max}$ abbrechen, wenn eine bestimmte vorgegebene Stelle $x_{\max}$ erreicht wurde, d.h. wenn $x^{(i_{\max})} \geq x_{\max}$ erfüllt ist.

(iii) Berechnen Sie mit Ihrem Programm aus (ii) für das Anfangswertproblem $(**)$ aus Aufgabe 17 jeweils Näherungen für $y(1)$ zu den Schrittweiten $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$.

(iv) Berechnen Sie mit ihrem Programm aus (ii) für das Anfangswertproblem $(**)$ aus Aufgabe 17 jeweils eine Näherung auf dem Intervall $[0, 5]$ mit den Schrittweiten $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ und stellen Sie diese grafisch dar. Was fällt Ihnen auf?

Lösung:

(i) Wir verwenden die Koeffizienten aus der Vorlesung

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

um die Verfahrensfunktion Φ aufzustellen (siehe Skript Abschnitt 7.7).

Zunächst definieren wir:

$$\begin{aligned} k_1(x, y, h) &:= f(x, y), \\ k_2(x, y, h) &:= f(x + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{h}{2} k_1(x, y, h)), \\ k_3(x, y, h) &:= f(x + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{h}{2} k_2(x, y, h)), \\ k_4(x, y, h) &:= f(x + h, y + h k_3(x, y, h)). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich die Verfahrensfunktion

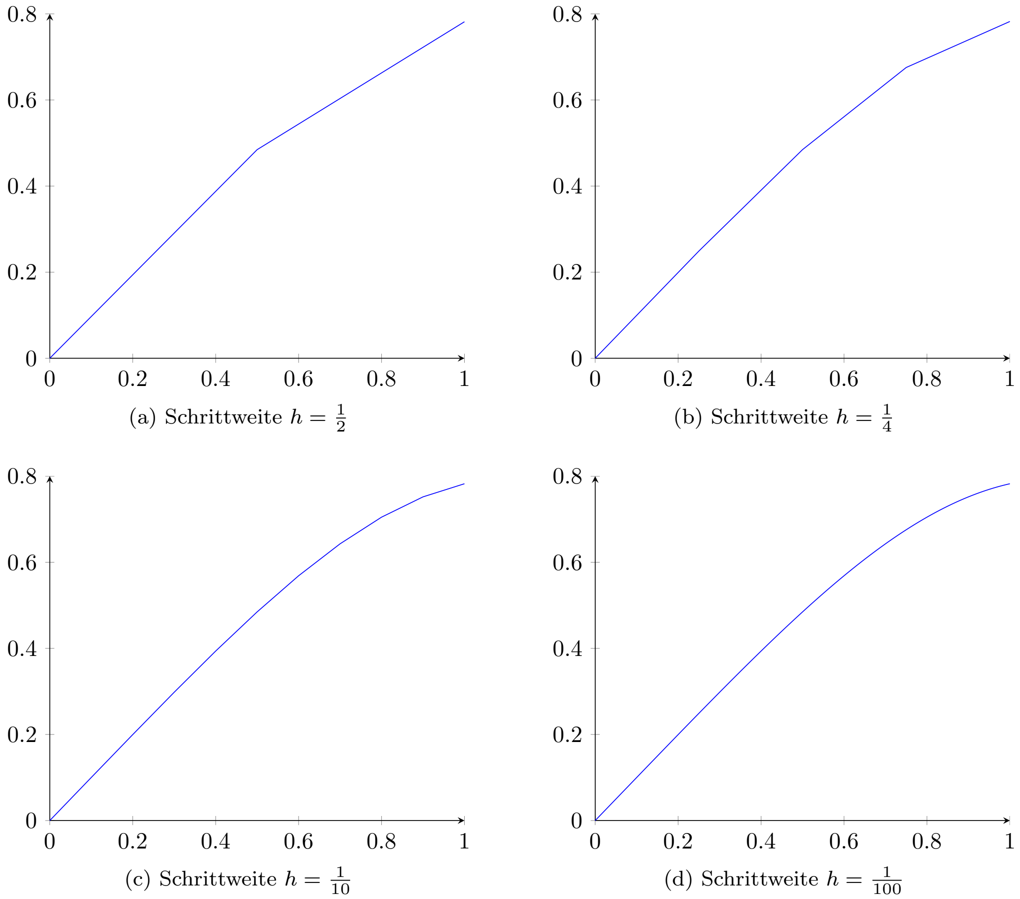
$$\begin{aligned}
\Phi(x,y,h) &= \frac{1}{6}k_1(x,y,h) + \frac{1}{3}k_2(x,y,h) + \frac{1}{3}k_3(x,y,h) + \frac{1}{6}k_4(x,y,h) \\
&= \frac{1}{6}f(x,y) + \frac{1}{3}f\left(x+\tfrac{h}{2}, y+\tfrac{h}{2}f(x,y)\right) \\
&\qquad + \frac{1}{3}f\left(x+\tfrac{h}{2}, y+\tfrac{h}{2}f\left(x+\tfrac{h}{2}, y+\tfrac{h}{2}f(x,y)\right)\right) \\
&\qquad + \frac{1}{6}f\left(x+h, y+hf\left(x+\tfrac{h}{2}, y+\tfrac{h}{2}f\left(x+\tfrac{h}{2}, y+\tfrac{h}{2}f(x,y)\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

(ii) Eine mögliche Umsetzung finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

(iii) Wir erhalten die folgenden Näherungen für $y(1)$:

h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
Näherung für $y(1)$	$\approx 0{,}7817$	$\approx 0{,}7824$	$\approx 0{,}7824$	$\approx 0{,}7824$

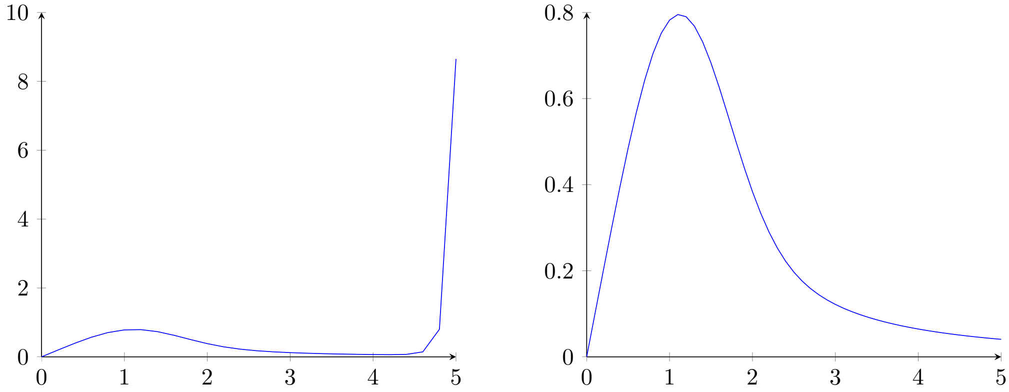
Plot der Näherungslösungen von $(**)$ für die Schrittweiten:



(a) Schrittweite $h = \frac{1}{2}$
(b) Schrittweite $h = \frac{1}{4}$
(c) Schrittweite $h = \frac{1}{10}$
(d) Schrittweite $h = \frac{1}{100}$

Abbildung 1: Näherungslösungen von $(**)$ auf $[0,1]$ zu verschiedenen Schrittweiten

(iv) Plot der Näherungslösungen von $(**)$ für die Schrittweiten:



(a) Schrittweite $h = \frac{1}{5}$ (b) Schrittweite $h = \frac{1}{10}$

Abbildung 2: Näherungslösungen von $(**)$ auf $[0, 5]$ zu verschiedenen Schrittweiten

Man erkennt, dass die Näherungslösung für „zu große“ h an der rechten Intervallgrenze unkontrolliert anwächst. Um sicherzustellen, dass die Näherung stabil bleibt, muss die Schrittweite kleiner als eine Konstante h_0 gewählt werden.