Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 8

Aufgabe 19 (Konsistenzordung)**:**
Zeigen Sie, dass das allgemeine 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\Phi(x,y,h) = (1-\beta)f(x,y) + \beta f\big(x + \frac{h}{2\beta}, y + \frac{h}{2\beta}f(x,y)\big)$$

mit $\beta \neq 0$ Konsistenzordnung 2 hat.

Lösung:
Es sei $z\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad z(x) = y$$

mit einer auf G Lipschitz-stetigen Funktion f (vgl. S. 91 im Skript). Durch Ableiten der Differentialgleichung erhalten wir zunächst

$$z''(x) = f_x(x, z(x)) + f_y(x, z(x))z'(x) = f_x(x, z(x)) + f_y(x, z(x))f(x, z(x)).$$

Nach dem Satz von Taylor erhalten wir außerdem

$$z(x+h) = z(x) + hz'(x) + \frac{h^2}{2}z''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

für $h \to 0$. Zudem liefert der Satz von Taylor für den zweiten Summanden der Verfahrensfunktion

$$f\big(x + \frac{h}{2\beta}, y + \frac{h}{2\beta}f(x,y)\big) = f(x,y) + \frac{h}{2\beta}f_x(x,y) + \frac{h}{2\beta}f_y(x,y)f(x,y) + \mathcal{O}(h^2)$$

für $h \to 0$. Damit erhalten wir für die Verfahrensfunktion

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,h) &= (1-\beta)f(x,y) - \beta\left(f(x,y) + \frac{h}{2\beta}f_x(x,y) + \frac{h}{2\beta}f_y(x,y)f(x,y)\right) + \mathcal{O}(h^2)\\ &= f(x,y) + \frac{h}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y)\right) + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

für $h \to 0$.

Um nun die Konsistenzordnung zu bestimmen, verwenden wir den lokalen Diskretisierungsfehler (für $h \neq 0$) und setzen ein:

$$\begin{aligned}\theta(x,y,h) &= \frac{z(x+h) - y}{h} - \Phi(x,y,h)\\ &= \frac{z(x) + hz'(x) + \frac{h^2}{2}z''(x) - y}{h} - f(x,y) - \frac{h}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y)\right) + \mathcal{O}(h^2)\\ &= \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

für $h \to 0$. Damit hat das Verfahren Konsistenzordnung 2.

Aufgabe 20 (Anfangswertproblem)**:**

(i) Führen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) = 6e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

2-ter Ordnung auf ein System erster Ordnung zurück.

(ii) Formulieren Sie für das System aus (i) das Verfahren von Heun (2-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit $\beta = \frac{1}{2}$) zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie damit eine Näherung für $y(1)$.

Lösung:

(i) Wir verwenden die zusätzliche Funktion z und erhalten das System

$$\begin{aligned} y'(x) &= z(x), \\ z'(x) &= 4z(x) + 5y(x) + 6e^{-x} \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = z(0) = 0$.

(ii) Für das Verfahren von Heun zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ definieren wir $x^{(i)} := \frac{i}{2}$ $(1 \leq i \leq 2)$. Außerdem benötigen wir die Funktionen

$$f_1(x, y, z) = z \quad \text{und} \quad f_2(x, y, z) = 4z + 5y + 6e^{-x}.$$

Damit können wir das Verfahren nun wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} y^{(i+1)} &= y^{(i)} + \frac{h}{2}\big[f_1(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}) \\ &\qquad + f_1\big(x^{(i)} + h, y^{(i)} + hf_1(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}), z^{(i)} + hf_2(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})\big)\big] \\ &= y^{(i)} + \frac{1}{4}\big[z^{(i)} + z^{(i)} + \frac{1}{2}f_2(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})\big] \\ &= \frac{13}{8}y^{(i)} + z^{(i)} + \frac{3}{4}e^{-x^{(i)}}, \\ z^{(i+1)} &= z^{(i)} + \frac{h}{2}\big[f_2(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}) \\ &\qquad + f_2\big(x^{(i)} + h, y^{(i)} + hf_1(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}), z^{(i)} + hf_2(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})\big)\big] \\ &= z^{(i)} + \frac{1}{4}\big[\big\{4z^{(i)} + 5y^{(i)} + 6e^{-x^{(i)}}\big\} + \big\{4\big(z^{(i)} + \frac{1}{2}f_2(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})\big) \\ &\qquad + 5\big(y^{(i)} + \frac{1}{2}f_1(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})\big) + 6e^{-(x^{(i)}+\frac{1}{2})}\big\}\big] \\ &= \frac{45}{8}z^{(i)} + 5y^{(i)} + \frac{3}{2}(3 + e^{-\frac{1}{2}})e^{-x^{(i)}}. \end{aligned}$$

Daraus lässt sich die gesuchte Näherung für $y(1)$ berechnen:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= 0 + 0 + \frac{3}{4}e^0 = \frac{3}{4} = 0{,}75, \\ z^{(1)} &= 0 + 0 + \frac{3}{2}(3 + e^{-\frac{1}{2}})e^0 \approx 5{,}41, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= \frac{13}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2}(3 + e^{-\frac{1}{2}}) + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{183}{32} + \frac{9}{4}e^{-\frac{1}{2}} \approx 7{,}08, \\ z^{(2)} &= \frac{45}{8} \cdot \frac{3}{2}(3 + e^{-\frac{1}{2}}) + 5 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2}(3 + e^{-\frac{1}{2}})e^{-\frac{1}{2}} = \frac{465}{16} + \frac{207}{16}e^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}e^{-1} \approx 37{,}46. \end{aligned}$$

Die gesuchte Näherung für $y(1)$ lautet also $y^{(2)} \approx 7{,}08$.

Aufgabe 21 (Randwertproblem)**:**

(i) Zeigen Sie, dass für eine C^3-Funktion y die Gleichung

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

für $h \to 0$ gilt. Dies wird auch als zentraler Differenzenquotient bezeichnet.

(ii) Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-y'' + 2y' - \pi^2 y = f \text{ auf } (0,2), \quad y(0) = 0,\ y(2) = 2 \tag{$*$}$$

mit $f(x) = 2\pi\cos(\pi x) - 1 + 2x - \frac{\pi^2}{2}x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Leiten Sie das lineare Gleichungssystem her, das man erhält, wenn man das Randwertproblem mit Hilfe zweiter Differenzen und des zentralen Differenzenquotionen aus (i) zur Schrittweite h diskretisiert, wobei h stets so gewählt sei, dass $\frac{2}{h} =: N \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das zu vorgegebener Schrittweite h das lineare Gleichungssystem aus (ii) löst und die Näherung grafisch darstellt.

(iv) Starten Sie Ihr Programm aus (ii) mit den Schrittweiten $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ und vergleichen Sie die einzelnen Näherungen untereinander, sowie mit der exakten Lösung $y(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}x^2$.

Lösung:

(i) Die Taylor-Entwicklung von $y \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ liefert:

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h \cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x) + \mathcal{O}(h^3), \\ y(x-h) &= y(x) - h \cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x) + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

für $h \to 0$. Zeihen wir nun die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhalten wir

$$y(x+h) - y(x-h) = 2hy'(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

für $h \to 0$. Teilen durch $2h$ liefert schließlich die behauptete Gleichung.

(ii) Mit der Schrittweite h erhalten wir die Stellen $x_k = kh$ $(0 \le k \le N)$. Die Näherungen $y_k \approx y(x_k)$ und die Randwerte $y_0 = 0$, sowie $y_N = 2$ liefern zusammen mit dem zentralen Differenzenquotienten und den zweiten Differenzen die Gleichungen für $1 \le k \le N-1$:

$$\begin{aligned} & -\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} + 2\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - \pi^2 y_k = 2\pi\cos(\pi x_k) - 1 + 2x_k - \frac{\pi^2}{2}{x_k}^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -(1+h)y_{k-1} + (2 - h^2\pi^2)y_k - (1-h)y_{k+1} = h^2\left[2\pi\cos(\pi x_k) - 1 + 2x_k - \frac{\pi^2}{2}{x_k}^2\right] \end{aligned}$$

Um dieses System in Matrix-Vektorschreibweise formulieren zu können, definieren wir die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 - h^2\pi^2 & -(1-h) & 0 & \cdots & 0 \\ -(1+h) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -(1-h) \\ 0 & \cdots & 0 & -(1+h) & 2 - h^2\pi^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$$

und den Vektor

$$b = \begin{pmatrix} h^2\left[2\pi\cos(\pi x_1) - 1 + 2x_1 - \frac{\pi^2}{2}{x_1}^2\right] + (1+h)y_0 \\ h^2\left[2\pi\cos(\pi x_2) - 1 + 2x_2 - \frac{\pi^2}{2}{x_2}^2\right] \\ \vdots \\ h^2\left[2\pi\cos(\pi x_{N-2}) - 1 + 2x_{N-2} - \frac{\pi^2}{2}{x_{N-2}}^2\right] \\ h^2\left[2\pi\cos(\pi x_{N-1}) - 1 + 2x_{N-1} - \frac{\pi^2}{2}{x_{N-1}}^2\right] + (1-h)y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Um die gesuchte Näherung zu erhalten, muss also das lineare Gleichungssystem $My = b$ mit $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})$ gelöst werden.

(iii) Eine mögliche Umsetzung findet man auf der Vorlesungshomepage.

(iv) Die folgende Grafik zeigt die exakte Lösung $y(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}x^2$:

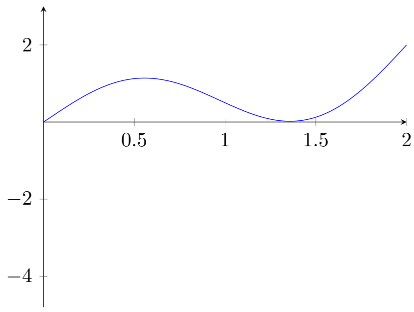
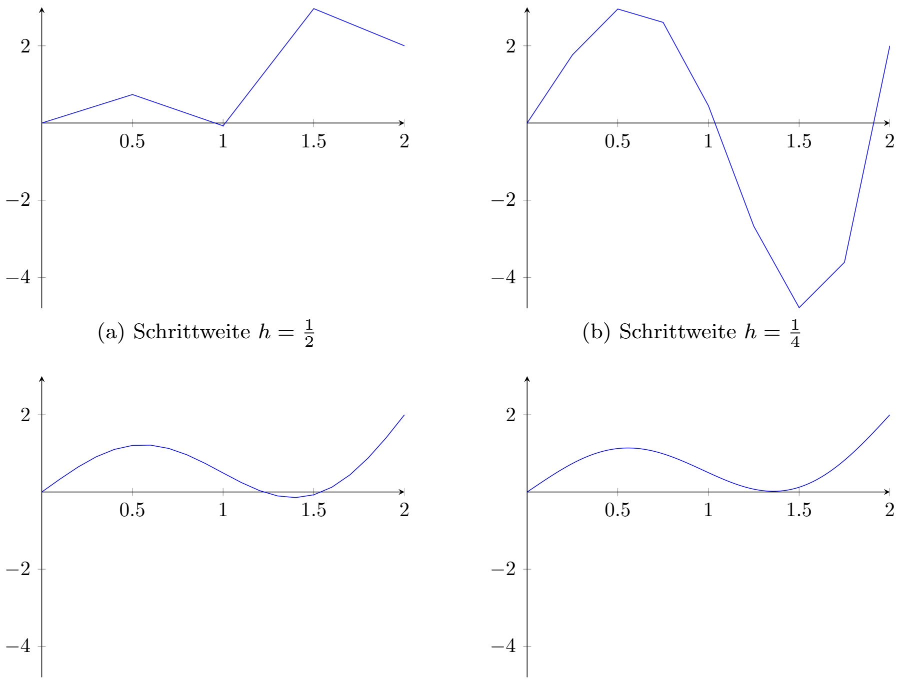


Abbildung 1: Exakte Lösung von (∗)

Mit dem Programm berechnet man die folgenden Näherungen:



(a) Schrittweite $h = \frac{1}{2}$

(b) Schrittweite $h = \frac{1}{4}$

(c) Schrittweite $h = \frac{1}{10}$

(d) Schrittweite $h = \frac{1}{100}$

Abbildung 2: Näherungen von (∗) für unterschiedliche Schrittweiten