Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Numerische Methoden - Wintersemester 2016/17

28.03.2017

Aufgabe 1 (5 Punkte)**:**
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & -3 & -10 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit normierter Diagonale sowie eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = LR$ gilt.

(ii) Lösen Sie mit Hilfe der in Teil (i) berechneten Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(iii) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion die ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe einer LR-Zerlegung mit Pivotisierung durch **Vorwärts- und Rückwärtssubstitution** löst.

Hinweis: Gehen Sie direkt davon aus, dass A quadratisch und regulär ist und b die passende Dimension hat. Sie dürfen außerdem eine Funktion `[L,R,P]=LR(A)`, welche zu einer gegeben Matrix A eine LR-Zerlegung mit Pivotisierung berechnet, und eine Funktion `[m]=dim(A)`, welche die Dimension einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ liefert, verwenden.

Lösung:

(i) Die LR-Zerlegung ohne Pivotisierung liefert in den einzelnen Schritten die folgenden Matrizen:

$$A^{(1)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & -3 & -10 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(2)} := L_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}, \quad L_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} := L_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man schließlich die Matrizen $R := A^{(3)}$, sowie

$$L := {L_1}^{-1} {L_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Mit der Variable $y := Rx$ löst man zunächst das lineare Gleichungssystem $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen. Man erhält als Lösung $y = (-1, -5, -\frac{5}{4})^T$. Nun muss noch das lineare Gleichungssystem $Rx = y$ mittels Rückwärtseinsetzen gelöst werden. Somit ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ durch $x = (1, 2, -1)$ gegeben.

(iii)
```
function b = LGS(A,b)
  m = dim(A);
  [L,R,P] = LR(A);
  b = P*b;
  for i = 2:m
    for j = 1:i-1
      b(i) = b(i)-L(i,j)*b(j);
    end
  end
  for i = m:-1:1
    for j = i+1:m
      b(i) = b(i)-R(i,j)*b(j);
    end
    b(i) = b(i)/R(i,i);
  end
end
```

Aufgabe 2 (5 Punkte)**:**
Gegeben seien die Matrix A sowie deren Inverse A^{-1} durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A lauten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$.

(i) Bestimmen Sie $\operatorname{cond}_\infty(A)$. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Weiter sei Δb eine Störung der rechten Seite. Wie groß ist der relative Fehler der Lösung bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm höchstens, wenn der relative Fehler der Störung höchstens 10^{-3} beträgt.

(ii) Geben Sie eine Diagonalmatrix D an, sodass $\operatorname{cond}_\infty(DA)$ minimal wird. Berechnen Sie außerdem diesen minimalen Wert von $\operatorname{cond}_\infty(DA)$.

(iii) Berechnen Sie die ersten drei Schritte der von-Mises Iteration mit der Matrix A und dem Startvektor $x^{(0)} = (1, 0)^T$ und geben Sie die im dritten Schritt berechnete Näherung und den absoluten Fehler an den approximierten Eigenwert an.

(iv) Betrachten Sie nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & -10 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der inversen Iteration von Wielandt eine Approximation für einen Eigenwert der Matrix B mit Grobnäherung $\tilde{\lambda} = 2$. Verwenden Sie den Startvektor $x^{(0)} = (-1, -2, 1)^T$ und führen Sie zwei Iterationsschritte durch.

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 1 (ii) verwenden.

Lösung:

(i) Es gilt

$$\operatorname{cond}_\infty(A) = \underbrace{\|A\|_\infty}_{=7} \underbrace{\left\|A^{-1}\right\|_\infty}_{=1} = 7.$$

Mit der Formel aus der Vorlesung erhält man

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \operatorname{cond}_\infty(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 7 \cdot 10^{-3} = 0{,}007.$$

(ii) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Kondition minimal wird, wenn $D = \operatorname{diag}(\frac{1}{3}, \frac{1}{7})$ gewählt wird. Damit erhalten wir

$$\operatorname{cond}_\infty(DA) = \underbrace{\|DA\|_\infty}_{=1} \underbrace{\left\|(DA)^{-1}\right\|_\infty}_{=\frac{23}{5}} = \frac{23}{5} = 4{,}6.$$

(iii) Die ersten drei Schritte der von-Mises Iteration liefern die folgenden Ergebnisse:

$$z^{(1)} := Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad i_1 = 2, \quad x^{(1)} := \frac{z^{(1)}}{z^{(1)}_{i_1}} = \frac{z^{(1)}}{4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$z^{(2)} := Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 4 \end{pmatrix}, \quad i_2 = 2, \quad x^{(2)} := \frac{z^{(2)}}{z^{(2)}_{i_2}} = \frac{z^{(2)}}{4} = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$z^{(3)} := Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{41}{16} \\ \frac{21}{4} \end{pmatrix}, \quad i_3 = 2, \quad x^{(3)} := \frac{z^{(2)}}{z^{(3)}_{i_3}} = \frac{z^{(3)}}{\frac{21}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{41}{84} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Index $i_2 = 2$ erhält man als Approximation für den betragsmäßig größten Eigenwert nach dem dritten Schritt $\tilde{\lambda}_2 = \frac{21}{4}$. Der absolute Fehler beträgt somit $\left|5 - \frac{21}{4}\right| = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

(iv) Die inverse Iteration von Wielandt liefert:

$$(B - \tilde{\lambda}E)z^{(1)} = x^{(0)} \;\Rightarrow\; z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = 2, \quad x^{(1)} := \frac{z^{(1)}}{z^{(1)}_{i_1}} = \frac{z^{(1)}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$(B - \tilde{\lambda}E)z^{(2)} = x^{(1)} \;\Rightarrow\; z^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad i_2 = 2, \quad x^{(2)} := \frac{z^{(2)}}{z^{(2)}_{i_2}} = \frac{z^{(2)}}{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die gesuchte Näherung nach dem zweiten Schritt $2 + \frac{1}{z^{(2)}_{i_1}} = 2 - 1 = 1$.

Dieser Eigenwert ist sogar exakt und $x^{(2)}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**:**
Gegeben sei die zu maximierende Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = 5x_1 - 2x_2 - 25$. Bestimmen Sie eine optimale Basislösung und geben Sie den maximalen Wert von Z an unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 \le 14 \\ -x_1 & +x_2 \ge -7 \\ -x_1 & +2x_2 \le -4 \end{cases}, \quad x_1 \le 5, x_2 \le 0.$$

Hinweis: Führen Sie zunächst eine geeignete Transformation der beiden Variablen durch.

Lösung:
Zunächst muss das Problem auf Normalform gebracht werden. Die Transformation $\tilde{x}_1 := 5 - x_1$ und $\tilde{x}_2 := -x_2$ liefert das lineare Optimierungsproblem: Maximieren Sie die Zielfunktion

$$\tilde{Z}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = -5\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} -2\tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 \le 4 \\ -\tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 \le 2 \\ \tilde{x}_1 & -2\tilde{x}_2 \le 1 \end{cases}, \quad \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \ge 0.$$

Das Ausgangstableau für dieses Problem lautet:

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	
y_1	-2	1	1	0	0	4
y_2	-1	$\boxed{1}$	0	1	0	2
y_3	1	-2	0	0	1	1
	5	-2	0	0	0	0

.

Der Simplex-Algorithmus liefert im ersten Schritt das Tableau:

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	
y_1	-1	0	1	-1	0	2
$\tilde{x}_2$	-1	1	0	1	0	2
y_3	-1	0	0	2	1	5
	3	0	0	2	0	4

.

Da in der Zielfunktionszeile nur noch positive Einträge stehen, ist der Simplex-Algorithmus hier beendet und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (0, 2)$ ist eine optimale Basislösung für $\tilde{Z}$.

Rücktransformation liefert schließlich die gesuchte optimale Basislösung $(x_1, x_2) = (5, -2)$ für Z und den optimalen Wert $Z(5, -2) = 4$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ x^2 - y \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass F eine Nullstelle (x^*, y^*) in $[0, 2] \times [0, 4]$ besitzt.

Hinweis: Sie können direkt vorgehen oder die Hilfsfunktion $f(x) = x^2(1 + x^2) - 4$ verwenden.

(ii) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F. Begründen Sie, warum der Vektor $(x, y)^T = (0, 0)^T$ nicht als Startvektor für das Newton-Verfahren geeignet ist.

(iii) Führen Sie die ersten zwei Newton-Schritte zum Startvektor $(x, y)^T = (1, 0)^T$ durch und geben Sie die approximative Nullstelle nach dem zweiten Schritt an.

Lösung:

(i) $(x, y)^T$ ist genau dann eine Nullstelle von F, wenn

$$0 = x^2 + y^2 - 4 \quad \text{und} \quad y = x^2$$

gilt. Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste ergibt das Nullstellenproblem $f(x) = 0$. Das heißt ist x^* eine Nullstelle von f, so ist $(x^*, (x^*)^2)^T$ eine Nullstelle von F.

Es gilt $f(0) = -4 < 0$ und $f(2) = 16 > 0$. Wegen der Stetigkeit von f liegt also nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle x^* von f in $[0, 2]$. Damit liegt $y^* := (x^*)^2$ in $[0, 4]$, also besitzt F eine Nullstelle (x^*, y^*) in $[0, 2] \times [0, 4]$.

(ii) Die Jacobi-Matrix von F lautet

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit $z^{(k)} = (x, y)^T$ und Startvektor $z^{(0)}$ lautet das Newtonverfahren

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \left(F'(z^{(k)})\right)^{-1} F(z^{(k)}) = z^{(k)} + \frac{1}{2x(1+2y)} \begin{pmatrix} -1 & -2y \\ -2x & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ x^2 - y \end{pmatrix} \quad (k \geq 0).$$

Für $(0,0)^T$ ist die Jacobi-Matrix von F nicht invertierbar, also ist $(0,0)^T$ nicht als Startvektor für das Newton-Verfahren geeignet.

(iii) Die Approximationen der ersten beiden Schritte mit Startvektor $(x,y)^T = (1,0)^T$ lauten:

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$z^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{45} \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{73}{4} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{61}{36} \\ \frac{20}{9} \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte approximative Nullstelle nach dem zweiten Schritt lautet also $(\frac{61}{36}, \frac{20}{9})^T \approx (1.69, 2.22)^T$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)**:**
Gegeben sei das Integral

$$\int_1^e (\ln(x) + x - 1)\ dx,$$

dessen exakter Wert $e(\frac{e}{2} - 1) + \frac{3}{2}$ beträgt. Formulieren Sie die Sehnentrapezregel (Im Skript „zweipunktige Trapezregel“ genannt) und berechnen Sie damit eine Näherung für das obige Integral. Geben Sie außerdem den absoluten Fehler an.

Hinweis: $3 - e \approx 0{,}28$.

Lösung:
Die Sehnentrapezregel lautet:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + R_T(f).$$

Damit berechnet man die folgende Approximation für das obige Integral:

$$\int_1^e (\ln(x) + x - 1)\ dx \approx \frac{e-1}{2} [\ln(1) + 1 - 1 + \ln(e) + e - 1] = \frac{e}{2}(e-1) \approx 2{,}34.$$

Der absolute Fehler lautet $\left|e(\frac{e}{2} - 1) + \frac{3}{2} - \frac{e}{2}(e-1)\right| = \left|\frac{1}{2}(3-e)\right| \approx 0{,}14.$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**:**

(i) Zeigen Sie, dass das modifizierte Polygonzugverfahren, also das 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit $\beta = 1$, Konsistenzordnung 2 hat.

(ii) Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 4 - \frac{y(x)}{(x+\frac{1}{4})^2}, \quad y(0) = 0.$$

Formulieren Sie für dieses Anfangswertproblem das modifizierte Polygonzugverfahren, also das 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit $\beta = 1$, zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie damit eine Näherung für $y(1)$.

Lösung:

(i) Sei z die Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad z(x) = y.$$

Der Satz von Taylor liefert:

$$z(x+h) = z(x) + hz'(x) + \frac{h^2}{2} z''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$z''(x) = f_x(x, z(x)) + f_y(x, z(x)) \underbrace{z'(x)}_{=f(x,z(x))}$$

$$\Phi(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2} f_x(x,y) + \frac{h}{2} f_y(x,y) f(x,y) + \mathcal{O}(h^2)$$

für $h \to 0$. Damit gilt für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\begin{aligned}
\theta(x,y,h) &= \frac{z(x+h)-y}{h} - \Phi(x,y,h) \\
&= \frac{z(x)+hz'(x)+\frac{h^2}{2}z''(x)-y}{h} - f(x,y) - \frac{h}{2}[f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)] + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

für $h \to 0$ und somit hat das modifizierte Polygonzugverfahren Konsistenzordung 2.

(ii) Das modifizierte Polygonzugverfahren mit dem Anfangswert $y^{(0)} = 0$ lautet:

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{1}{2}\left[4 - \frac{y^{(k)} + \frac{1}{4}\left(4 - \frac{y^{(k)}}{(x^{(k)}+\frac{1}{4})^2}\right)}{(x^{(k)}+\frac{1}{2})^2}\right] \quad (k \geq 0),$$

wobei $x^{(k)} = \frac{k}{2}$ $(k \geq 0)$. Damit berechnet man:

$$\begin{aligned}
y^{(1)} &= 0 + \frac{1}{2}\left[4 - \frac{0+\frac{1}{4}(4-0)}{\frac{1}{4}}\right] = 0, \\
y^{(2)} &= 0 + \frac{1}{2}\left[4 - \frac{0+\frac{1}{4}(4-0)}{1}\right] = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Näherung für $y(1)$ lautet also $\frac{3}{2}$.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**:**
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-y(x)'' + 4(1-x)y'(x) - 3y(x) = 8x^2 - 4 \quad (x \in (-1,1)), \quad y(-1) = \frac{3}{5},\ y(1) = 3.$$

Leiten Sie das lineare Gleichungssystem her, welches man erhält, wenn man das Randwertproblem mit finiten Differenzen und Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ diskretisiert (Sie brauchen das Gleichungssystem nicht zu lösen).

Hinweis: Verwenden Sie für die Diskretisierung der ersten Ableitung den zentralen Differenzenquotienten:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}.$$

Lösung:
Um die zweite Ableitung zu diskretisieren werden zweite Differenzen verwendet:

$$y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2}$$

und für die erste Ableitung der zentrale Differenzenquotient:

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h},$$

wobei $x_k = -1 + \frac{k}{2}$ $(0 \leq k \leq 4)$ gilt.

Mit den Näherungswerten $y_k \approx y(x_k)$ $(1 \leq k \leq 3)$ und den Randwerten $y_0 = \frac{3}{5}$ und $y_4 = 3$ erhält man schließlich die Gleichungen:

$$-(2-x_k)y_{k-1} + \frac{5}{4}y_k - x_k y_{k+1} = 2{x_k}^2 - 1 \quad (1 \leq k \leq 3),$$

also das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$