UNIVERSITÄT KARLSRUHE 22.11.2007
Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

5.Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1
Es seien $p, q \in \mathbb{N}, p \neq q$. Zeigen Sie, dass sich die Lösung von

$$u' = 1 + u^p - u^q, \quad u(0) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt.
Hinweis: Majorantenmethode.

Aufgabe 2
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u_t = u_x, \quad u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (|x| \leq r)$$

in der Form $u = \sum\limits_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} x^m t^n$ nach dem Verfahren von Cauchy-Kowalewsky. Berechnen Sie die c_{mn} explizit mit Hilfe der c_k.

Aufgabe 3
Zeigen Sie: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0 \text{ in } \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\}$$

hat die Form

$$u = g(\frac{x}{y}) + y h(\frac{x}{y})$$

mit Funktionen $g, h \in C^2(0, \infty)$.
Hinweis: Transformation auf Normalform.

Aufgabe 4
Man transformiere den Differentialausdruck $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy}$ auf Normalform.