UNIVERSITÄT KARLSRUHE 29.11.2007
Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

6.Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1
Man überführe den Differentialausdruck $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy}$ im Gebiet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ in Normalform.

Aufgabe 2
Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar, und v sei definiert durch

$$v(r, \varphi) = u(r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

a) Drücken Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r}$ bzw. $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ durch die partiellen Ableitungen von u aus.

b) Zeigen Sie, dass für $(x, y) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r, \varphi)$$

gilt.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie alle in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierten Lösungen

$$u(x, y) = u(r \cos\varphi, r \sin\varphi) = f(r)g(\varphi)$$

der Gleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Aufgabe 4
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = B^2, B \neq 0, B$ positiv semidefinit und e_j der j-te Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass durch

$$D_A(x) = \limsup_{h\to 0} \left[\frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{n} \left(u(x + hBe_j) - 2u(x) + u(x - hBe_j)\right) \right]$$

ein Operator im Sinne von Hopf definiert wird.