UNIVERSITÄT KARLSRUHE 06.12.2007
Institut für Analysis

Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

7.Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1

Es sei $b \in \mathbb{R}^n$. Man beweise das Maximumprinzip für $L[u] := \Delta u + u' \cdot b$:
Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in C(\overline{\Omega})$ sowie $u_{|\Omega} \in C^2(\Omega)$, und gilt $L[u] \geq 0$ in Ω sowie $u \leq M$ auf $\partial\Omega$, so ist $u \leq M$ in Ω.

Aufgabe 2

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, u sei in Ω subharmonisch und beschränkt, $M \in \mathbb{R}$ und es gelte $\limsup\limits_{x \to \xi} u(x) \leq M$ für alle Randpunkte $\xi \neq \xi^1, \xi^2, ..., \xi^p$. Zeigen Sie, dass dann $u(x) \leq M$ in Ω gilt.

(In dieser Aufgabe bedeute die Sprechweise „u subharmonisch", dass u stetig ist und im Sinne von Hopf $\mathcal{D}_E\, u(x) \geq 0$ $(x \in \Omega)$ gilt, wobei E die Einheitsmatrix bezeichne.)

In den folgenden beiden Aufgaben sei die Funktion $R : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar mit $R(a) = R(b)$, die Funktion $\varphi : [a, b] \to [0, 2\pi]$ stetig differenzierbar, wachsend und surjektiv, und die Menge B gegeben durch

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\varphi(t), y = r\sin\varphi(t),\ 0 \leq r \leq R(t),\ a \leq t \leq b\right\}.$$

Weiter werde die geschlossene Kurve Γ parametrisiert durch

$$\gamma(t) = (R(t)\cos\varphi(t), R(t)\sin\varphi(t)) \quad (t \in [a, b]).$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Sind die Funktionen $u, v : B \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int\limits_B (u_x(x, y) + v_y(x, y))\, d(x, y) = \int\limits_\Gamma -v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy.$$

Aufgabe 4

Es sei $u : B \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$, und es gelte $\Delta u + \lambda u = 0$ sowie $u_{|\Gamma} = 0$. Zeigen Sie: Entweder ist $u = 0$ (und dann λ beliebig) oder $\lambda > 0$.