UNIVERSITÄT KARLSRUHE 13.12.2007
Institut für Analysis

Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

8.Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Zeigen Sie:

a) Ist die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ konkav, $\mathcal{D}_A$ ein Hopfscher elliptischer Differentialoperator und existiert $\mathcal{D}_A u(x)$, so gilt $\mathcal{D}_A u(x) \leq 0$.

b) Ist $u \in C^2(\Omega)$, so ist u genau dann konkav, wenn $u''(x)$ (aufgefaßt als Hessematrix von u an der Stelle x) für jedes $x \in \Omega$ negativ semidefinit ist.

c) Ist die Funktion $u \in C^2(\Omega)$ und u konkav, so ist u superharmonisch.

Aufgabe 2

Die Funktion $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeigen Sie:

a) u ist genau dann monoton wachsend, wenn

$$D^+ u(t) := \limsup_{h \to 0^+} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \geq 0 \quad (t \in (0,1))$$

gilt.

b) u ist genau dann konvex, wenn

$$\overline{D}^2 u(t) := \limsup_{h \to 0} \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2} \geq 0 \quad (t \in (0,1)$$

gilt.

– **bitte wenden** –

Aufgabe 3

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n, x^0 \in D$ und $u : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Die Funktion u wird in x^0 oberhalb stetig genannt, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $x \in D, \|x - x^o\| < \delta$ stets $u(x) - u(x^0) < \varepsilon$ folgt.
Ist u in jedem $x \in D$ oberhalb stetig, so heißt u auf D oberhalb stetig.

Für die folgenden Aufgabenteile wird D als kompakt und die Funktion u als oberhalb stetig auf D vorausgesetzt. Zeigen Sie:

a) u besitzt ein Maximum auf D.

b) Es gibt eine monoton fallende Folge (u_n) von auf D stetigen Funktionen mit

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \quad (x \in D).$$

c) u ist meßbar.