UNIVERSITÄT KARLSRUHE 20.12.2007
Institut für Analysis

Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

9.Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) u ist harmonisch.

b) u ist Realteil (Imaginärteil) einer holomorphen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$. (Hierbei wird Ω als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefaßt.)

Aufgabe 2
Es sei $R > 0$, $n \geq 2$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega = K(x^0, R) \setminus \{x^0\}$ und u eine in Ω beschränkte, harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass u sich in den Punkt x^0 harmonisch fortsetzen lässt.

Aufgabe 3
Zeigen Sie: Ist $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine einseitig beschränkte harmonische Funktion, so ist u konstant.

Aufgabe 4
Es sei $\rho > 0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{K(x^0, \rho)}$. Konstruieren Sie eine in $\overline{\Omega}$ stetige und beschränkte, in Ω negative und subharmonische Funktion u, die $u(x) = 0$ auf $\partial\Omega$ erfüllt.
Ansatz: $u(x) = f(r^2) - f(\rho^2), r = |x - x^0|$.

Aufgabe 5
Es sei u harmonisch in $x_n > 0$, stetig in $x_n \geq 0$ und es gelte $u(x_1, ..., x_{n-1}, 0) = 0$. Zeigen Sie, dass sich u in den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ harmonisch fortsetzen lässt.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr.