UNIVERSITÄT KARLSRUHE 10.01.2008
Institut für Analysis

Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

10.Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt. Zeigen Sie: Die durch

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0)$$

definierte Funktion ist harmonisch und beschränkt, und es gilt

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = f(x_0)$$

für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Formulieren und beweisen Sie eine Form des Maximumprinzips für die rechte Halbebene: Ist u subharmonisch in $x > 0$, stetig in $x \geq 0$, gilt $u(0,y) \leq M$ und ... (?), so folgt $u \leq M$ in $x \geq 0$.

Aufgabe 3

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Weiter sei $\underline{u}_\varphi$ die obere Einhüllende aller Unterfunktionen und $\overline{u}_\varphi$ die untere Einhüllende aller Oberfunktionen des Dirichletproblems $\Delta u = 0$ in $\Omega, u = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie:

a) $\underline{u}_\varphi \leq \overline{u}_\varphi$,

b) $\underline{u}_{c\varphi} = c\underline{u}_\varphi$ und $\overline{u}_{c\varphi} = c\overline{u}_\varphi$, falls $c > 0$,

c) $\underline{u}_\varphi + \underline{u}_\psi \leq \underline{u}_{\varphi+\psi}$ und $\overline{u}_\varphi + \overline{u}_\psi \geq \overline{u}_{\varphi+\psi}$, vorausgesetzt $\psi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ist beschränkt,

d) $\underline{u}_\varphi = -\overline{u}_{-\varphi}$.

– bitte wenden –

Aufgabe 4 (Fortsetzung von Aufgabe 3)
Unter jeder der folgenden Voraussetzungen ist $\underline{u}_\varphi = \overline{u}_\varphi$:

a) Es gibt eine Unterfunktion v bzw. eine Oberfunktion w mit $\lim\limits_{x\to\xi} v(x) = \varphi(\xi)$ bzw. $\lim\limits_{x\to\xi} w(x) = \varphi(\xi)$ für jeden Randpunkt ξ.

b) φ ist ein Polynom.

c) φ stetig.

Anleitung: Man zeige bei b): $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, wobei φ_1 und φ_2 subharmonische Polynome in Ω sind. Für c) verwende man den Weierstraßschen Approximationssatz.