UNIVERSITÄT KARLSRUHE 17.01.2008
Institut für Analysis

Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

11.Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1
Es seien $a, b \in (0, \infty)$, und die folgenden Mengen seien gegeben:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\ 0 < y < b\right\},\ \Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ 0 < y < b\right\}$$

sowie $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$. Desweiteren sei die Funktion $\phi : \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ stetig.
Zeigen Sie, dass das gemischte Problem $\Delta u = 0$ in Ω, $u = \phi$ auf Γ_2, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf Γ_1 genau eine auf $\overline{\Omega}$ stetige Lösung besitzt.

Hinweis: Rückführung auf ein Dirichletproblem durch Spiegelung an der y-Achse.

Aufgabe 2
Es sei $R > 0$, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kreiskegel mit Spitze in 0 sowie $\Omega = K(0,R) \setminus C$. Weiter sei u die Lösung nach Perron der Gleichung $\Delta u = 0$ in Ω, $u(\xi) = \|\xi\|$ auf $\partial\Omega$.
Zeigen Sie, dass die Funktion u die vorgegebenen Randwerte in jedem Randpunkt „annimmt".

Hinweis: Zum Nachweis von geeigneten Schrankenfunktionen verwende man Aufgabe 4 des 9. Übungsblattes.

Aufgabe 3
Es sei $R > 0$, $f : [0, R] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$ und $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

Die (Hopfsche) Lösung von $\Delta u = f(\|x\|)$ in Ω, $u = \phi$ auf $\partial\Omega$ lässt sich schreiben als Summe einer rotationssymmetrischen und einer harmonischen Funktion.