UNIVERSITÄT KARLSRUHE 24.01.2008
Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

12.Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1

Es seien (a_k) und (b_k) Folgen reeller Zahlen, wobei (a_k) eine monton fallende Folge nichtnegativer Zahlen sei. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ werde s_n definiert durch $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, wobei $s_0 = 0$ gesetzt wird. Zeigen Sie:

a) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

b) Ist (a_k) zusätzlich noch eine Nullfolge und gilt mit einem $M \geq 0$ die Abschätzung $|s_n| \leq M \ (n \in \mathbb{N})$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergent.

c) Sind die Funktionen $\Psi_k \ (k \in \mathbb{N})$ auf $[\alpha, \beta]$ definiert und konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k$ dort gleichmäßig, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Psi_k$ auf $[\alpha, \beta]$ gleichmäßig.

d) Ist (a_k) zusätzlich eine Nullfolge und gilt mit den Ψ_k aus Teil c) die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \Psi_k(x) \right| \leq M \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und jedes } x \in [\alpha, \beta] \,,$$

so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Psi_k$ gleichmäßig auf $[\alpha, \beta]$.

Hinweis: Abelsche partielle Summation.

Aufgabe 2

Es sei (c_k) eine monoton fallende Nullfolge. Bestimmen Sie die Lösung $u = u(x,t)$ des folgenden Anfangsrandwertproblems:

$$u_t = u_{xx} \text{ in } (0,\pi) \times (0,\infty), \ \ u = 0 \text{ auf } \{0\} \times (0,\infty) \text{ und } \{\pi\} \times (0,\infty),$$
$$\text{sowie } \lim_{t \to 0^+} u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx) \text{ für } 0 < x < \pi.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3

Die Funktion $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei stetig und nach oben beschränkt, und es gelte $u_t \leq \Delta u$ in $t > 0$ sowie $u \leq M$ auf $t = 0$. Zeigen Sie, dass dann überall $u \leq M$ gilt.

Hinweis: $v = u - \varepsilon(2nt + \|x\|^2)$.

Aufgabe 4

Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, ungerade und 2-periodische Funktion. Zeigen Sie:

Die (beschränkte) Lösung des Cauchyproblems $u_t = u_{xx}$ in $t > 0$, $u = \varphi$ auf $t = 0$ ist bei festem $t > 0$ eine ungerade und 2-periodische Funktion von x mit $u(x, t) = 0$ für $x \in \mathbb{Z}$.