UNIVERSITÄT KARLSRUHE 31.01.2008
Institut für Analysis

Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

13.Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1

Es sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Das Anfangsrandwertproblem

$$u_t = u_{xx} \text{ in } (0,1) \times (0,\infty),$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ für } x \in [0,1],\ \ u(0,t) = \varphi(0),\ u(1,t) = \varphi(1) \text{ für } t > 0$$

besitzt genau eine Lösung.

Hinweis: Übungsblatt 12, Aufgabe 4.

Aufgabe 2 (Fortsetzung)

Leiten Sie für die Funktion u aus Aufgabe 1 die Darstellung

$$u(x,t) = l(x) + \int_0^1 G(x,t,\xi)(\varphi(\xi) - l(\xi))\, d\xi \qquad ((x,t) \in (0,1) \times (0,\infty))$$

her, wobei l eine affin lineare und G eine nichtnegative Funktion ist.

Aufgabe 3

Es sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ und Lipschitzkonstante L. Zeigen Sie: Für die Lösung u des Anfangsrandwertproblems

$$u_t = u_{xx} \text{ in } (0,1) \times (0,\infty),$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ für } x \in [0,1],\ \ u(0,t) = u(1,t) = 0 \text{ für } t > 0,$$

gilt $|u(x,t)| \leq \frac{L}{2} \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}$ für alle $x \in [0,1]$ und $t \geq 0$.

Aufgabe 4

Es sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass das gemischte Anfangsrandwertproblem

$$u_t = u_{xx} \text{ in } (0,1) \times (0,\infty),$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ für } x \in [0,1],\ \ u_x(x,t) = 0 \text{ für } t > 0 \text{ und } x = 0 \text{ bzw. } x = 1,$$

eine Lösung besitzt.