UNIVERSITÄT KARLSRUHE 07.02.2008
Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Lemmert
Dipl.-Math. M. Mitschele

Partielle Differentialgleichungen

14. und letztes Übungsblatt - WS 2007/2008

Aufgabe 1

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das in jedem Randpunkt ξ eine äußere Normale $\nu(\xi)$ besitze. Weiter sei $0 \in \Omega$ und für alle $\xi \in \partial\Omega$ gelte stets $\nu(\xi) \cdot \xi > 0$. Zeigen Sie:
Ist u stetig in $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$, $u_t \leq \Delta u$ in $\Omega \times (0, \infty)$, $u(x, 0) \leq 0$ für $x \in \overline{\Omega}$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) \leq 0$ für jedes $x \in \partial\Omega$ und $t > 0$, so folgt $u \leq 0$ in $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$.
Hinweis: $w = u - \varepsilon(1 + x^2)e^{At}$.

Aufgabe 2

Es seien $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ Funktionen mit kompaktem Träger. Weiter sei u die Lösung des Cauchyproblems $\Box u = 0$, $u = \varphi$ und $u_t = \psi$ für $t = 0$. Zeigen Sie: Wird u bei festem t als Funktion von x aufgefasst, so besitzt diese ebenfalls einen kompakten Träger.

Aufgabe 3

Die Funktion ψ sei auf $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ durch $\psi(x, y) = \sum\limits_{j,k=1}^{\infty} a_{jk} \sin(jx) \sin(ky)$ gegeben, wobei $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} (j + k)|a_{jk}| < \infty$ vorausgesetzt werde. Bestimmen Sie die Lösung des Problems

$$\Box u = 0 \text{ in } \Omega \times (0, \infty),$$
$$u = 0 \text{ und } u_t = \psi \text{ für } t = 0, \text{ sowie } u = 0 \text{ in } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen $u = u(x, t) = w(r, t)$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $r = \|x\|$, der Wellengleichung $\Box u = 0$.