Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

Partielle Differentialgleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Gleichung

$$-\Delta u(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Bestimmen Sie außerdem eine Lösung so, dass $u \in C^2(\overline{B}_1(0))$ und $u(x) = 0$ für $|x| = 1$.

Aufgabe 2

Für $n \geq 2$ und $R > 0$ heisst die Abbildung S, definiert durch

$$S : \begin{cases} \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ x \mapsto \frac{R^2}{|x|^2} x, \end{cases}$$

Spiegelung an der Sphäre $\partial B_R(0)$. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Die Funktion

$$v(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} u(Sx)$$

heisst *Kelvin-Transformierte* von u. Zeigen Sie:

$$\Delta v(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n+2} (\Delta u)(Sx).$$

Insbesondere gilt: u harmonisch $\Rightarrow$ v harmonisch.

Aufgabe 3

Im $\mathbb{R}^2$ seien Polarkoordinaten wie folgt eingeführt: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Zeigen Sie:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Betrachten Sie den Kegel $C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < r < \infty,\ 0 < \varphi < \alpha\}$ mit Öffnungswinkel $\alpha \in (0, 2\pi)$. Bestimmen Sie alle in C_α harmonischen, positiven Funktionen u der Form $u(r,\varphi) = r^\beta w(\varphi)$ mit $u = 0$ auf ∂C_α.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die Mittelwerte $m_R(0;u), M_R(0;u)$ für die Funktionen $x_i, x_i x_j$ und $|x|^\alpha$ mit $\alpha > -n$ und $i,j = 1,\dots,n$.

b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Mittelwerte $m_R(x_0;|x|^2), M_R(x_0;|x|^2)$ sowie $m_R(x_0;|x|^4)$ und $M_R(x_0;|x|^4)$.

Besprechung in der Übung am 8.11.2010.