Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

Partielle Differentialgleichungen
10. Übungsblatt

Aufgabe 30

Es sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $g \in C(\Gamma_T)$, $f, c \in C(\Omega_T)$ für ein $T > 0$. Zusätzlich gelte $\sup_{\Omega_T} c < \infty$. Zeigen Sie mit Hilfe einer Variante der Energiemethode (Satz 20), dass das Problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - cu = f & \text{in} \quad \Omega_T \\ u = g & \text{auf} \quad \Gamma_T \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega} \times (0,T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ besitzt.

Aufgabe 31

Es sei (a,b) ein reelles Intervall und $f \in C^2[a,b]$ eine konkave Funktion mit $f(a) = f(b) = 0$. Die Funktion $u \in C^{2,1}([a,b] \times [0,T])$ sei eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in} \quad (a,b) \times (0,T] \\ u(x,0) = f(x) & \text{für} \quad x \in (a,b) \\ u(a,t) = u(b,t) = 0 & \text{für} \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass u konkav in x ist für alle $t \in [0,T]$.

Hinweis: Es ist hilfreich, die Aussage zunächst für den Fall $\frac{\partial u}{\partial t} \in C^{2,1}([a,b] \times [0,T])$ zu beweisen. Im allgemeinen Fall können Differenzenquotienten nützlich sein.

Aufgabe 32

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ erfülle

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta u \quad \text{in} \quad \Omega_T.$$

Zeigen Sie, dass u ihr Minimum auf dem parabolischen Rand Γ_T annimmt.

Aufgabe 33

Es sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ und Lipschitzkonstante L. Zeigen Sie: Die Lösung $u \in C^{2,1}((0,1) \times (0,T]) \cap C([0,1] \times [0,T])$ des Problems

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in} \quad (0,1) \times (0,T] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{für} \quad t \in (0,T] \end{cases}$$

erfüllt die Abschätzung $|u(x,t)| \leq \frac{L}{2} \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}$ für alle $x \in [0,1]$ und $t \in [0,T]$.

Besprechung in der Übung am 24.1.2011.