Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

Partielle Differentialgleichungen
11. Übungsblatt

Aufgabe 34

Seien $c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Finden Sie eine explizite Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u + cu = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Aufgabe 35

Bestimmen Sie radialsymmetrische Lösungen der 3-dimensionalen Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$, d.h. Lösungen der Form $u(x,t) = v(r,t)$ mit $v : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ und $r = |x|$.

Aufgabe 36

Sei $\alpha \neq -1$. Finden Sie eine Lösung $u(x,t)$ der homogenen eindimensionalen Wellengleichung auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = g(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x), \quad x \geq 0,$$

die außerdem der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0,t), t \geq 0$$

genügt. Hierbei gelte für die Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R}_+)$: $g(x) = 0,\ h(x) = 0$ für $x \in (0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$.

Zeigen Sie, dass das obige Problem i.A. keine Lösung besitzt, falls $\alpha = -1$.

Hinweis: Setzen Sie die Anfangsdaten geeignet auf $x < 0$ fort und lösen Sie das Problem als Anfangswertproblem in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 37

Es sei $u(x,t)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen ebenfalls die homogene Wellengleichung lösen:

a) $u_\varepsilon(x,t) = u(\varepsilon x, \varepsilon t),\ \ \varepsilon > 0$,

b) $u_A(x,t) = u(Ax,t),\ \ A \in O(n)$,

c) $u_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n, t) = u\left(\dfrac{x_1 - \varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, x_2, \ldots, x_n, \dfrac{t - \varepsilon x_1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$ wobei $\varepsilon \in (-1,1)$.

Besprechung in der Übung am 7.2.2011