Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

Partielle Differentialgleichungen
12. Übungsblatt

Aufgabe 38

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für die dreidimensionale homogene Wellengleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_3^2 & \text{für} \quad x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Aufgabe 39

Es sei u eine Lösung der eindimensionalen homogenen Wellengleichung mit Anfangsbedingungen $u(x,0) = g(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$. Hierbei seien $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ und es existiere ein $R > 0$ mit $g(x) = h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$. Zeigen Sie, dass ein $t_0 > 0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)^2\,dx \quad \forall t > t_0,$$

d.h. ab einer Zeit $t_0 > 0$ sind kinetische und potentielle Energie gleich.

Besprechung in der Übung am 7.2.2011