Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

Partielle Differentialgleichungen
13. Übungsblatt

Aufgabe 40

Stehende Wellen sind Lösungen der Wellengleichung der Form $u(x,t) = v(x)\sin(\omega t + \varphi)$ mit $\omega > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

a) Welcher Differentialgleichung genügt v?

b) Es sei $n = 1$. Bestimmen Sie alle stehenden Wellen. Zeigen Sie explizit, dass sich jede stehende Welle als Summe einer nach rechts und einer nach links laufenden Welle darstellen lässt.

c) Bestimmen Sie alle stehenden sphärischen Wellen im Fall $n = 3$. Als sphärische Welle bezeichnen wir eine Lösung der Wellengleichung, die nur von t und $r = |x|$ abhängt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $U := ru$ (u stehende sphärische Welle).

Aufgabe 41

Es sei $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung, welche bei $t = 0$ ihre Anfangsdaten stetig annimmt. Es gelte $u(x,0) = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \geq R$ ($R > 0$ fest).

Zeigen Sie, dass das Energieintegral

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \, dx$$

zeitlich konstant ist.

Aufgabe 42

Sei $a < b$ und $T(a,b)$ die konvexe Hülle der Punkte $(2a,0),\ (2b,0),\ (a+b, b-a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, d.h.

$$T(a,b) = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ :\ 0 \leq t \leq b-a,\ 2a+t \leq x \leq 2b-t\}.$$

Es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

wobei $f \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ und $f(x,t) \leq 0$ für $(x,t) \in T(a,b)$. Weiterhin gelte $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \leq 0$ für $x \in [2a, 2b]$.

a) Zeigen Sie für alle $a \leq a' \leq b' \leq b:\ u(a'+b', b'-a') \leq \frac{1}{2}(u(2a',0) + u(2b',0))$.

b) Beweisen Sie mit Hilfe von a):

$$\max_{T(a,b)} u = \max_{[2a,2b]\times\{0\}} u.$$