Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

Partielle Differentialgleichungen
2. Übungsblatt

Aufgabe 5

Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion einer Funktion $u : B \to \mathbb{R}$, die in einer Kugel $B \subset \mathbb{R}^n$ positiv und harmonisch ist, und die folgende Eigenschaft besitzt:

$$(*) \qquad \exists P \in \partial B \text{ so dass } \forall \bar{x} \subset \partial B \backslash \{P\} \text{ gilt : } \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in B}} u(x) = 0.$$

Gehen Sie hierfür folgendermaßen vor:

a) Für $d > 0$ seien $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 > d\}$ und $B = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \left|x - \left(\frac{1}{2d}, 0, \ldots, 0\right)\right| < \frac{1}{2d}\right\}$. Zeigen Sie: Die Kelvin-Transformation $S(x) = \frac{x}{|x|^2}$ ist eine Bijektion zwischen H und B.

b) Betrachten Sie auf H die Funktion $v(x) = x_1 - d$. Beweisen Sie, dass die Kelvin-Transformierte
$$u(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$
die Eigenschaft $(*)$ besitzt.

c) Sei nun $n = 2$ und u wie in b). Konstruieren Sie für alle $\alpha \in [0, \infty]$ eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B$ mit:
$$\lim_{k \to \infty} x_k = P, \qquad \text{und} \qquad \lim_{k \to \infty} u(x_k) = \alpha.$$

Aufgabe 6

Es sei $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Finden Sie eine in $B_1(0)$ harmonische Funktion u, die auf $\partial B_1(0)$ die Randbedingungen
$$u(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos(k\varphi), \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$
erfüllt.

Aufgabe 7

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie: Existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $|u(x_0)| = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$, so gilt $u \equiv \text{const}$.

b) Sei nun $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash K$. Die Funktion u sei harmonisch in Ω, stetig auf $\overline{\Omega}$ und es gelte $\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$. Beweisen Sie, dass gilt: $\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)|$.

Besprechung in der Übung am 15.11.2010.