

Partielle Differentialgleichungen 3. Übungsblatt

Aufgabe 8

Es sei $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$ ein Halbraum. Zu $x = (x', x_n) \in H$ sei $x^* = (x', -x_n) \in \mathbb{R}^n$ der an ∂H gespiegelte Punkt.

a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$G(x, y) = \gamma(x - y) - \gamma(x^* - y) \quad (x \neq y, x \in H, y \in \bar{H})$$

ist Greensche Funktion für den Halbraum H .

b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Zeigen Sie, dass die harmonische Fortsetzung von f auf H gegeben ist durch

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial G}{\partial y_n}(x, (y', 0)) f(y') dy', & x \in H \\ f(x), & x \in \partial H \end{cases}$$

wobei $\frac{\partial G}{\partial y_n}(x, y) = \frac{2x_n}{\omega_n |x - y|^n}$.

Hinweis: Für alle $x \in H$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial G}{\partial y_n}(x, (y', 0)) dy' = 1.$$

Aufgabe 9

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein Punkt $x_0 \in \Omega$ heißt hebbare Singularität der harmonischen Funktion $u : \Omega \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, falls eine harmonische Funktion $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\tilde{u}(x) = u(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$. Zeigen Sie:

a) Ist $u : \Omega \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{\gamma(x - x_0)} = 0,$$

so ist x_0 eine hebbare Singularität.

Hinweis: Betrachten Sie für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ die Funktion $v_\varepsilon(x) = u - Pu + \varepsilon(\gamma(x - x_0) - g_0(R))$. Hierbei ist Pu das Poisson-Integral von u auf $\partial B_R(x_0)$. Zeigen Sie nun, dass in $B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ gilt: $v_\varepsilon \geq 0$ für $\varepsilon \geq 0$ und $v_\varepsilon \leq 0$ für $\varepsilon \leq 0$.

b) Ist $u : \Omega \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{\gamma(x - x_0)} = c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$, so gilt $u(x) = c\gamma(x - x_0) + v(x)$ mit einer harmonischen Funktion $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 10

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und G Greensche Funktion auf Ω . Beweisen Sie, dass G eindeutig ist.

Besprechung in der Übung am 22.11.2010.