Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

Partielle Differentialgleichungen
4. Übungsblatt

Aufgabe 11

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Weiter sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie:

  (i) u harmonisch $\Rightarrow$ $f(u)$ subharmonisch.

  (ii) Ist f zusätzlich monoton wachsend, so gilt:
  u subharmonisch $\Rightarrow$ $f(u)$ subharmonisch.

b) Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$ auf $B_1(0)$ bzw. auf $B_1(0)\backslash\{0\}$ falls $\alpha < 0$. Bestimmen Sie diejenigen α, für die die Funktion subharmonisch bzw. superharmonisch ist.

Aufgabe 12

a) Zeigen Sie: Eine im $\mathbb{R}^2$ subharmonische, nach oben beschränkte Funktion u ist konstant.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst die folgende Aussage: Sei $\alpha = \max\limits_{\partial B_1(0)} u$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$u(x) \leq \alpha + \varepsilon \log(|x|) \text{ für alle } x \text{ mit } 1 \leq |x| < \infty.$$

b) Finden Sie eine im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ subharmonische, beschränkte und nicht-konstante Funktion.
Hinweis: Sind w_1, w_2 subharmonisch, so ist auch $w = \max(w_1, w_2)$ subharmonisch.

Aufgabe 13

Sei $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}$ und $u : \overline{H} \to \mathbb{R}$ harmonisch auf H und in $\overline{H}$ stetig mit $u = 0$ auf ∂H. Zeigen Sie: Ist u beschränkt, so gilt $u \equiv 0$.

Hinweis: Definieren Sie die Funktion $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $v(x) = u(x)$ falls $x \in H$, und $v(x_1, \ldots, x_n) = -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ für $x \in \mathbb{R}^n\backslash H$. Zeigen Sie, dass v in $\mathbb{R}^n$ harmonisch ist.

Besprechung in der Übung am 29.11.2010.