Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

Partielle Differentialgleichungen
6. Übungsblatt

Aufgabe 17

Lösen Sie mit Hilfe eines Fourierreihen-Ansatzes $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(y)\sin(nx)$ das folgende Problem:

$$\begin{aligned} \Delta u &= y\sin^3 x & (x,y) &\in (0,\pi)\times(0,1) \\ u(0,y) = u(\pi,y) &= 0 & y &\in (0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) &= 0 & x &\in (0,\pi). \end{aligned}$$

Hinweis: Es gilt: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$.

Aufgabe 18

$K \subset \mathbb{R}^2$ heißt Kegel mit Öffnungswinkel α, falls K durch eine euklidische Bewegung in die Menge

$$K_0 = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi),\ 0 < r < \infty,\ 0 < \varphi < \alpha\}$$

überführt werden kann.
Es sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Im Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ erfülle Ω folgende Bedingung: Es existiert ein Kegel K mit $K \subset \Omega^c$, $\bar{K} \cap \bar{\Omega} = \{x_0\}$. Zeigen Sie, dass x_0 ein regulärer Randpunkt ist.

Aufgabe 19

Beweisen Sie den Konvergenzsatz von Harnack:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und (u_k) eine monoton wachsende (fallende) Folge von in Ω harmonischen Funktionen. Falls ein $a \in \Omega$ existiert für das $\lim_{k\to\infty} u_k(a)$ existiert, so konvergiert (u_k) lokal gleichmäßig in Ω gegen eine harmonische Funktion.

Aufgabe 20: Poincaré's "Méthode de Balayage"

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das durch abzählbar viele Kugeln B_j mit $\overline{B}_j \subset \Omega$ für alle $j \in \mathbb{N}$ überdeckt wird. Für alle $j \in \mathbb{N}$ und $u \in C(\bar{\Omega})$ sei $P_{B_j}u$ das Poisson-Integral von u auf ∂B_j. Weiter sei $(i_j)_{j\in\mathbb{N}} = (1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,1,\ldots)$. Zeigen Sie:

(a) Für jede subharmonische Funktion $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ konvergiert die rekursiv definierte Folge $u_j := P_{B_{i_j}} u_{j-1}$ gegen eine in Ω harmonische Funktion u_∞.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 19.

b) Ist Ω ein reguläres Gebiet und $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ subharmonisch, so ist u_∞ die eindeutige Lösung in $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ des Problems

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u &=& 0 & \text{in } \Omega \\ u &=& u_0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Besprechung in der Übung am 13.12.2010.