**Karlsruher Institut für Technologie (KIT)**
**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

# Partielle Differentialgleichungen
# 7. Übungsblatt

## Aufgabe 21

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

Zeigen Sie, dass $v(x,t) = x \cdot \nabla_x u(x,t) + 2t\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

*Hinweis:* Die Funktion $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ löst für $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung.

## Aufgabe 22

Finden Sie für $c \in \mathbb{R}$ eine explizite Lösungsdarstellung für das Problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + cu = f(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,t) = g(x) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

## Aufgabe 23

Es sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$ und $g \in C^1([0,\infty))$. Betrachten Sie das Anfangs-/Randwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= & 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u &= & 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ u(x,t) &= & g(t) & \text{auf } \{x=0\} \times [0,\infty). \end{cases}$$

Leiten Sie für die Lösung $u$ die folgende Darstellungsformel her:

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} g(s)\, ds.$$

*Hinweis:* Definieren Sie $v(x,t) := u(x,t) - g(t)$ für $x \geq 0$ und setzen Sie $v(x,t)$ für $x < 0$ ungerade fort, d.h. $v(x,t) = -v(-x,t)$ für $x < 0$.

Besprechung in der Übung am 20.12.2010.