Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2010/2011

Partielle Differentialgleichungen
8. Übungsblatt

Aufgabe 24

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und konvexe Funktion, die für gegebene $a, M > 0$ die Wachstumsbedingung $f(x) \leq Me^{ax^2}$ erfüllt. Betrachten Sie die Funktion

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t) f(y)\, dy.$$

a) Zeigen Sie, dass mit einem geeigneten $t_0 > 0$ die Funktion $u(x,t)$ wohldefiniert ist für alle $t \in (0, t_0), x \in \mathbb{R}$ und die homogene Wärmeleitungsgleichung löst.

b) Zeigen Sie, dass $u(x,t)$ konvex in x ist für alle $t \in (0, t_0)$.

c) Beweisen Sie, dass gilt:

$$t_0 > t_2 \geq t_1 > 0 \Rightarrow u(x, t_2) \geq u(x, t_1).$$

Aufgabe 25: Symmetriegruppen der Wärmeleitungsgleichung

Es sei $u(x,t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ die Funktion $u_\varepsilon(x,t)$, definiert durch

a) $u_\varepsilon(x,t) = u(x, t+\varepsilon), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

b) $u_\varepsilon(x,t) = \dfrac{1}{(1+4\varepsilon t)^{n/2}} \exp\left(\dfrac{-\varepsilon |x|^2}{1+4\varepsilon t}\right) u\left(\dfrac{x}{1+4\varepsilon t}, \dfrac{t}{1+4\varepsilon t}\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

c) $u_\varepsilon(x,t) = e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} u(x - 2\varepsilon t, t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Beachten Sie: $n = 1$.

ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung löst.

Wie kann man mit Hilfe der gegebenen Transformationen eine Konstante in die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung überführen?

Aufgabe 26

Bestimmen Sie eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= 1_{[0,\infty)}(x) & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Besprechung in der Übung am 10.1.2011.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und alles Gute für das Jahr 2011!