Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Partielle Differentialgleichungen
9. Übungsblatt

Aufgabe 27

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$ und $c : \Omega_T \to \mathbb{R}$ mit $\sup_{\Omega_T} c < \infty$. Die Funktion $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ erfülle die Differentialungleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - c(x,t)u \geq 0 \quad \text{in } \Omega_T,$$

sowie $u \geq 0$ auf dem parabolischen Rand Γ_T. Für $\alpha > 0$ sei $\psi(x,t) = -(u(x,t)_-)^4 e^{-\alpha t}$. Beweisen Sie das Minimumprinzip (vgl. Satz 18) mit Hilfe der folgenden Schritte unter geeigneter Wahl von α (Energiemethode) :

a) $\psi \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$.

b) $\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi \geq 0$ in Ω_T.

c) $t \mapsto \int_\Omega \psi(x,t)\,dx$ ist eine monoton wachsende Funktion auf $[0,T]$.

d) $u(x,t) \geq 0$ für alle $(x,t) \in \Omega_T$.

Aufgabe 28

Betrachten Sie das Problem

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = h(x). \end{cases}$$

a) Verwenden Sie einen Separationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$, um die Lösung von $(*)$ mit $h(x) = \sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$ zu bestimmen.

b) Lösen Sie nun Problem $(*)$ mit $h(x) = 5\sin(x) - 2\sin(5x)$.

Aufgabe 29

Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, ungerade und 2-periodische Funktion. Zeigen Sie:
Die gemäß Satz 4 der Vorlesung bestimmte Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = \varphi & \text{auf} \quad \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases}$$

ist bei festem $t > 0$ eine ungerade und 2-periodische Funktion in x mit $u(x,t) = 0$ für $x \in \mathbb{Z}$.

Besprechung in der Übung am 17.1.2011.