Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof.Dr. Wolfgang Reichel

Partielle Differentialgleichungen – Wintersemester 2010/2011
Handout über Vertauschung von Grenzübergängen

Sätze basierend auf dem Prinzip der gleichmäßigen Konvergenz

Lemma V.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $w, w_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, seien stetig und beschränkt. Falls $w_k \to w$ gleichmäßig in Ω, dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega w_k\, dx = \int_\Omega w\, dx.$$

Lemma V.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann ist*

$$v : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega u(x,y)\, dy \end{array} \right.$$

(gleichmäßig) stetig.

Beweis: Stetigkeit folgt z.B. aus Lemma V.1, denn für $x_k \to \bar{x} \in \Omega$ gilt: $w_k(y) := u(x_k, y)$, $y \in \Omega$ konvergiert für $k \to \infty$ auf Ω gleichmäßig gegen $w(y) := u(\bar{x}, y)$, $y \in \Omega$. Alternativ: man nutzt, daß zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|u(x,y) - u(\tilde{x}, \tilde{y})| \le \epsilon$ falls $|x - \tilde{x}|, |y - \tilde{y}| \le \delta$. Damit gilt

$$|v(x) - v(\tilde{x})| \le \int_\Omega |u(x,y) - u(\tilde{x}, y)|\, dy \le \epsilon |\Omega| \text{ falls } |x - \tilde{x}| \le \delta.$$

Auf diese Weise erhält man auch die gleichmäßige Stetigkeit von v. ∎

Lemma V.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann ist*

$$v : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega u(x,y)\, dy \end{array} \right.$$

stetig partiell nach x_i differenzierbar auf Ω und es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y)\, dy.$$

Beweis: Sei $\bar{x}, y \in \Omega$ und (h_k) eine reelle Nullfolge. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\tilde{h}_k$, welches von $\bar{x}, y$ abhängt, mit $|\tilde{h}_k| \leq |h_k|$ und

$$\frac{u(\bar{x} + h_k e_i, y) - u(\bar{x}, y)}{h_k} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x} + \tilde{h}_k e_i, y) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}, y)$$

gleichmäßig in $y \in \Omega$. Die Behauptung folgt mit Lemma V.1. ∎

Bemerkung: Die gleichmäßige Stetigkeit von $u : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ ist gewährleistet, wenn z.B. Ω beschränkt ist und $u : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig ist. Gleiches gilt für die gleichmäßige Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Sätze basierend auf dem Prinzip der majorisierten Konvergenz

Lemma V.4 *Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $u : X \times Y \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingungen*

(C1) für alle $x \in X$ ist die Funktion $y \mapsto u(x, y)$ messbar auf Y

(C2) für fast alle $y \in Y$ ist die Funktion $x \mapsto u(x, y)$ stetig auf X

sowie die Bedingung

(M) $\exists h \in L^1(Y)$ mit $|u(x, y)| \leq h(y)$ für alle $x \in X$ und fast alle $y \in Y$.

Dann existiert

$$v : \begin{cases} X & \to \quad \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \quad \displaystyle\int_Y u(x, y)\, dy \end{cases}$$

und ist stetig in x auf X.

Beweis: Folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz. ∎

Lemma V.5 *Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $Y \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $u : X \times Y \to \mathbb{R}$ sei für alle $x \in X$ und fast alle $y \in Y$ partiell nach x_i differenzierbar. Falls $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} : X \times Y \to \mathbb{R}$ die Bedingungen (C1), (C2), (M) von Lemma V.4 erfüllen, dann ist*

$$v : \begin{cases} X & \to \quad \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \quad \displaystyle\int_Y u(x, y)\, dy \end{cases}$$

stetig partiell nach x_i differenzierbar auf X und es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \int_Y \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, y)\, dy.$$

Beweis: Sei (h_k) eine reelle Nullfolge. Dann gibt es zu $\bar{x} \in X$, $y \in Y$ nach dem Mittelwertsatz ein $\tilde{h}_k$, welches von $\bar{x}, y$ abhängt, mit $|\tilde{h}_k| \leq |h_k|$ und

$$\frac{v(\bar{x} + h_k e_i) - v(\bar{x})}{h_k} = \int_Y \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x} + \tilde{h}_k e_i, y)\, dy.$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz existiert der Limes $k \to \infty$ und kann berechnet werden, indem der Limes $k \to \infty$ unter das letzte Integral gezogen wird. ∎