Karlsruhe Institute of Technology

1. Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Wolfgang Reichel

Übersee-Vorlesung aus Oaxaca, Mexiko, 19. Oktober 2010

Institut für Analysis

Inhaltsübersicht

Karlsruhe Institute of Technology

1. Einführung: Notation und Beispiele

Karlsruhe Institute of Technology

1.1. Notation

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen. $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Schreibweise: $u(x)$ bzw. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Falls alle partielle Ableitungen der Ordnung $\leq k \in \mathbb{N}$ existieren und stetig sind so schreibt man:

$$u \in C^k(\Omega)$$

$C^0(\Omega) =$ Menge der auf Ω stetigen Funktionen

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n \text{ partielle Ableitung 1.Ordnung nach } x_i$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, u_{x_i x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n \text{ partielle Ableitung 2.Ordnung nach } x_i, x_j$$

Reihenfolge erheblich? Satz von Schwarz: $u \in C^2(\Omega) \Rightarrow u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$

Gradient, Hesse-Matrix

Für $u \in C^1(\Omega)$ heisst der Spaltenvektor

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})^T$$

Gradient von u (=Richtung des steilsten Anstiegs von u)

Für $u \in C^2(\Omega)$ heisst die symmetrische $n \times n$-Matrix

$$D^2 u = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & \cdots & u_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1} & \cdots & u_{x_n x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von u.

Höhere partielle Ableitungen

Wie beschreibt man effizient höhere partielle Ableitungen von u?

Multiindex-Schreibweise

Definition (Multiindex)

Ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit ganzzahligen Einträgen heisst Multiindex. Die ganze Zahl

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

heisst Ordnung des Multiindexes.
Für $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ heisst

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

partielle Ableitung der Ordnung $|\alpha|$ zum Multiindex α.

Beispiele

$n = 2$, $\alpha = (0, 1)$

$$D^\alpha u = \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$n = 3$, $\alpha = (2, 0, 1)$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_3}$$

$n = 4$, $\alpha = (1, 1, 1, 1)$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4}$$

Vektorwertige Funktionen

Ist $U : \Omega \to \mathbb{R}^l$ eine vektorwertige Funktion und $U = (u_1, \ldots, u_l)^T$ so bedeutet $U \in C^k(\Omega)$, dass $u_1, \ldots, u_l \in C^k(\Omega)$ liegen.
Ebenso:

$$D^\alpha U = (D^\alpha u_1, \ldots, D^\alpha u_l)^T$$

Divergenz: im Fall $l = n$

$$\operatorname{div} U = \nabla \cdot U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{1,x_1} + \cdots + u_{n,x_n}$$

Rotation: im Fall $l = n = 3$

$$\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \begin{pmatrix} u_{3,x_2} - u_{2,x_3} \\ u_{1,x_3} - u_{3,x_1} \\ u_{2,x_1} - u_{1,x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Identitäten zwischen rot, div, grad und Δ

Seien $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $U : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^2-Funktionen. Es gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot (\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \Delta u$$

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ heisst Laplace-Operator.

Für $n = 3$ gilt

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} U) - \Delta U$$

und

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} U) = 0, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0.$$

1.2. Was ist eine partielle DGl?

Pseudo-Definition

Eine partielle Differentialgleichung (pDGl) ist eine Gleichung, welche Funktionswerte und partielle Ableitungen einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^l$ enthält. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beispiel: (Wellengleichung). $n = 2$, $l = 1$, $\Omega = \mathbb{R}^2$. Sei

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & u(x,t) \end{cases}$$ eine zweimal stetig differenzierbare Funtion

u heisst Lösung der Wellengleichung

(1) $$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

falls gilt: $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.
$t =$Zeit, $x =$Ort. (1) heisst eindimensionale Wellengleichung.

Alternative Schreibweise für (1): $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

1.3. Woher kommen pDGlen? Welche Fragen stellen sich bei pDGlen?

Physik: Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik, Elastizitätstheorie, Optik, Flüssigkeits- und Gasdynamik, Kristallbildung, Wasserwellen usw.

Biologie: Populationsdynamik, Musterbildung (Morphogenese), Räuber-Beute-Modelle, Ausbreitung von Krankheiten

Chemie: Reaktionskinetik, Reaktions-Diffusionsmodelle

Finanzmathematik: Bestimmung von Optionspreisen (Black Scholes Modell), stochastische Differentialgleichungen

Geometrie: Bestimmung von Flächen vorgegebener mittlerer oder Gaußscher Krümmung, Beweis der Poincaré-Vermutung

Fragestellungen

Explizite Lösungen sind die Ausnahme!

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit oder Vielfachheit von Lösungen
- Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten
- qualitative Aussagen über Lösungen; Verhalten für grosse Zeiten; Aussagen über die Gestalt der Lösungen
- Bestimmung von Näherungen (-> Numerik)

1.4. Beispiele von pDGLen

(a) Transportgleichung:

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$. $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

$c \in \mathbb{R}^n$: Wind konstanter Stärke und Richtung

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen: $M(D) =$ Stoffmenge in D zum Zeitpunkt t

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx = \int_{D+c\tau} u(x,t+\tau)\,dx$$

wobei $\tau > 0$ eine beliebige Zeitspanne ist
(Annahme: nichts geht verloren, nichts kommt dazu)

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx = \int_D u(x+c\tau,t+\tau)\,dx$$

Differentiation nach τ und Auswertung bei $\tau = 0$:

Transportgleichung:

$$\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \int_D u(x,t)\,dx = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \int_D u(x+c\tau, t+\tau)\,dx$$

$$0 = \int_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) c_i + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right) dx$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig: $\Rightarrow$

Transportgleichung: $$\boxed{(2) \qquad \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0}$$

Kurz:

$$C \cdot \nabla u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad C = (c_1, \ldots, c_n)^T = \text{konstant}$$

Verallg. Transportgleichung: $$\boxed{(3) \qquad \sum_{i=1}^n c_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0}$$

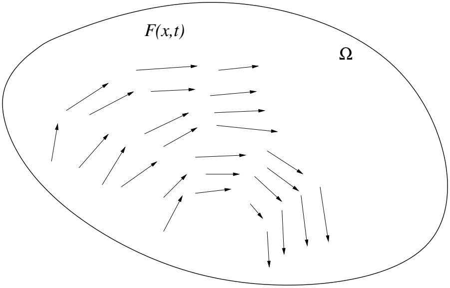
(b) Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
$u : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei C^1-Funktion.

Diffusion

Mechanismus, der Unterschiede in Stoffkonzentrationen ausgleicht.

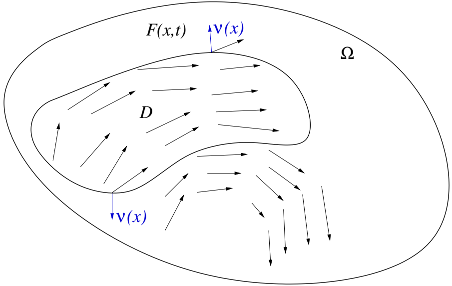
Wir betrachten folgendens Modell für Diffusion:



$F(x,t) \in \mathbb{R}^n$: Richtung und Stärke der Stoffzufuhr pro Zeiteinheit durch $x \in \Omega$ zum Zeitpunkt t
$f(x,t,u(x,t)) \in \mathbb{R}$: Reaktionsterm. Gibt Erzeugungs- ($f > 0$) oder Vernichtungsrate ($f < 0$) des Stoffes an der Stelle x zur Zeit t an. Kann abhängen von x, t sowie der aktuellen Stoffmenge $u(x,t)$.

Herleitung der Diffusionsgleichung

Sei $D \subset \Omega$ ein Normalgebiet, ν=äussere Normal an ∂D



$$\int_D u(x,t)\,dx =$$

Stoffmenge in D zum Zeitpunkt t

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx}_{\text{Änderung der Stoffmenge}} = \underbrace{-\oint_{\partial D} F(x,t)\cdot\nu(x)\,do}_{\text{Zufuhr/Abfluss durch }\partial D} + \underbrace{\int_D f(x,t,u(x,t))\,dx}_{\text{Reaktionsterm}}$$

$F \cdot \nu > 0$: Abfluss, $\quad F \cdot \nu < 0$: Zufuhr

Herleitung der Diffusionsgleichung – Forts.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx}_{\text{Änderung der Stoffmenge}} = \underbrace{-\oint_{\partial D} F(x,t)\cdot\nu(x)\,do}_{\text{Zufuhr/Abfluss durch }\partial D} + \underbrace{\int_D f(x,t,u(x,t))\,dx}_{\text{Reaktionsterm}}$$

Gaußscher-Integralsatz: $\longrightarrow\downarrow$

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx = \int_D \Big(-\operatorname{div}_x F(x,t) + f(x,t,u(x,t))\Big)dx$$

$D \subset \Omega$ beliebig $\Rightarrow$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\operatorname{div}_x F(x,t) + f(x,t,u(x,t))$$

Kurz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$$

Modellierung der Diffusion

Bisher:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$$

Diffusionsmodell: F ist proportional zu ∇u, d.h.

$$F(x,t) = -d\,\nabla u(x,t), \quad d = \text{ Diffusionskonstante} > 0.$$

Ergebnis:

Diffusionsgleichung: $$\boxed{(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f}$$

wobei Δ=Laplace Operator in den Ortskoordinaten $x_1, \ldots, x_n$ ist.

Spezialfälle von $u_t = d\Delta u + f$

(i) $f \equiv 0$; homogene Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\boxed{(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u}$$

(ii) f linear; lineare, inhomogene Diffusionsgleichung

$$f : \begin{cases} \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t,s) & \mapsto & c(x,t)s + f_0(x,t) \end{cases}$$

$$\boxed{(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + c(x,t)u + f_0(x,t)}$$

$c(x,t) =$ relative Wachstums-/Vernichtungsrate
$f_0(x,t) =$ absolute Wachstums-/Vernichtungsrate

Vergleich mit gewöhnlicher DGl

Karlsruhe Institute of Technology

partielle DGl. $\boxed{(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + c(x,t)u + f_0(x,t)}$

gewöhnliche DGl. $\boxed{(6') \quad \dot{u} = c(t)u + f_0(t), \quad u(0) = u_0}$

Lösung der gewöhnlichen DGl.:

$$u(t) = u_0 e^{\int_0^t c(s)\,ds} + \int_0^t f_0(\tau) e^{-\int_t^\tau c(s)\,ds} d\tau$$

und falls $c =$konstant

$$u(t) = u_0 e^{ct} + \int_0^t f_0(\tau) e^{c(t-\tau)} d\tau$$

Gilt etwas Ähnliches für die partielle DGl.? Wir werden sehen....

Die 1-dimensionale Diffusionsgleichung

$n = 1$, $x_1 < x$. Betrachte das Intervall $D = (x_1, x)$. Hier bedeutet:

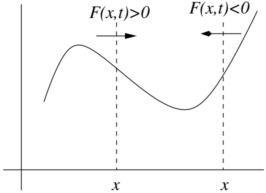
$F(x_1, t) > 0$ Zufluß am Punkt x_1, $F(x, t) > 0$ Abfluß am Punkt x

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x} u(\xi, t)\, d\xi = -F(x, t) + F(x_1, t) + \int_{x_1}^{x} f(\ldots)\, d\xi$$

$$= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t)\, d\xi$$

Differentiation $\frac{d}{dx}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{d}{dx}F(x, t) + f(x, t, u(x, t))$$



Modellierung: $F(x, t) = -d\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$

1-dimensionale Diffusionsgleichung: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t))}$

Verallgemeinerungen

Fluß $F = F_1 + F_2$

$F_1(x,t) = -d\nabla u(x,t), \quad d =$ Diffusionskonstante

$F_2(x,t) = Cu(x,t), \quad C = (c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{R}^n =$ Konvektionskonstante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \underbrace{C\cdot\nabla u}_{\text{Transportterm}} + f(x,t,u)$$

vgl. Transportgleichung.

Sowohl die Diffusion- als auch die Konvektionskonstanten können von x, t abhängen.

Ferner: $d = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ ist i.A. eine Matrix mit Koeffizienten $d_{ij}(x,t)$.

$$(7) \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\big(d(x,t)\nabla u\big) - C(x,t)\cdot\nabla u + f(x,t,u)}$$

Allgemeine Diffusions-Konvektions-Reaktionsgleichung

Kontext

In physikalischem, chemischem, biologischem Kontext:

$$u(x,t) = \begin{cases} \text{Wärmemenge [(5) heisst auch Wärmeleitungsgleichung]} \\ \text{Konzenration einer Chemikalie} \\ \text{Dichte einer Population} \end{cases}$$

Der Diffusionsmechanismus (=Konzentrationsausgleich) kann in viele Modelle leicht eingebaut werden:

Logistische DGl.

$$\dot{u} = u(\alpha - \beta u)$$

$u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$
gewöhnliche DGl.

Logistische DGl. mit Diffusion

$$(8) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + u(\alpha - \beta u)$$

$u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$
partielle DGl.

Diffusion beim Räuber-Beute Modell

Räuber-Beute Modell

$$\begin{cases} \dot{u} &= u(a - bv) \\ \dot{v} &= v(-c + du) \end{cases}$$

gekoppeltes System gewöhnlicher DGlen.

Räuber-Beute Modell mit Diffusion

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + u(a - bv) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \Delta v + v(-c + du) \end{cases}$$

gekoppeltes System partieller DGlen.

Diffusion

Diffusion = Mobilität der Population, d.h. Mitglieder der Population tendieren dazu, Stellen hoher Konzentration von Artgenossen zu verlassen und sich zu Stellen niedrigerer Konzentration zu bewegen.

Achtung: in manchen Modellen ist man am genauen Gegenteil intersessiert. Konzentrationphänomene bzw. Rudelbildung!