Karlsruhe Institute of Technology

2. Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Wolfgang Reichel

2.Transatlantische Vorlesung aus Oaxaca, Mexiko, 20. Oktober 2010

Institut für Analysis

Korrektur eines Fehlers von gestern

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und $U : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sei $C^1(\Omega)$, $U = (u_1, u_2, u_3)$

Rotation:

$$\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \begin{pmatrix} u_{3,x_2} - u_{2,x_3} \\ u_{1,x_3} - u_{3,x_1} \\ u_{2,x_1} - u_{1,x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Kann man sich das merken?

$$\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \begin{pmatrix} u_{3,x_2} - u_{2,x_3} \\ u_{1,x_3} - u_{3,x_1} \\ u_{2,x_1} - u_{1,x_2} \end{pmatrix}$$

Für $i, j, k, \in \{1, 2, 3\}$ sei $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \text{Vorzeichen der Permutation } (i, j, k) \\ 0, \text{ falls } (i, j, k) \text{ keine Permutation.} \end{cases}$

$e_i = i$-ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\operatorname{rot} U = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} e_i$$

1. Komponente: $i = 1$, Beitrag:	Permutation: (1,2,3) $+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$	Permutation: (1,3,2) $-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}$
2. Komponente: $i = 2$, Beitrag:	Permutation: (2,3,1) $+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$	Permutation: (2,1,3) $-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$
3. Komponente: $i = 3$, Beitrag:	Permuation: (3,1,2) $+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$	Permutation: (3,2,1) $-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$

Beispiele PDGlen – Erinnerung

(a) Transportgleichung:

$$\boxed{(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0}$$

Kurz:

$$C \cdot \nabla u + u_t = 0, \qquad C = (c_1, \ldots, c_n)^T = \text{konstant}$$

(b) Diffusionsgleichung:

$$\boxed{(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = d\Delta u(x,t) + f(x,t,u(x,t))}$$

wobei Δ=Laplace Operator in den Ortskoordinaten $x_1, \ldots, x_n$ ist.

Kurz:

$$u_t = d\Delta u + f(x,t,u)$$

Allgemeine Diffusions-Konvektions-Reaktionsgleichung:

$$\boxed{(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\Big(d(x,t)\nabla u\Big) - C(x,t) \cdot \nabla u + f(x,t,u)}$$

Weitere Beispiele (Poisson-/Laplace)

(c) Laplace bzw. Poissongleichung: Wir betrachten spezielle Lösungen der Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(x,u)$$

[beachte: der Rekationsterm darf hier nicht von der Zeit t abhängen!]

Gesucht sind Lösungen der Form $u(x,t) = v(x)$, d.h. zeitunabhängige Lösungen. Da $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, muss v die Gleichung

$$0 = d\Delta v(x) + f(x, v(x)), \quad x \in \Omega$$

erfüllen. Hier können wir o.B.d.A. $d = 1$ annehmen.

Poisson- bzw. Laplacegleichung

$$0 = \underbrace{d}_{=1} \Delta v(x) + f(x, v(x)), \quad x \in \Omega$$

Die Gleichung

$$\boxed{(10) \quad -\Delta v = f(x, v) \text{ in } \Omega}$$

heisst **(nichtlineare) Poissongleichung**.

Hängt f nur von x und nicht von v selbst ab so heisst

$$\boxed{(11) \quad -\Delta v = f(x) \text{ in } \Omega}$$

lineare Poissongleichung.

Im Fall $f = 0$ nennt man

$$\boxed{(12) \quad -\Delta v = 0 \text{ in } \Omega}$$

Laplacegleichung.

Ein paar explizite Lösungen

(i) $n = 2$, $v(x, y) = x^2 - y^2$ (bzw. $v(x, y) = x$, $v(x, y) = y$) löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$$

(ii) allgemeiner: $n \geq 1$, $v(x_1, \ldots, x_n) = x_i^2 - x_j^2$ (bzw. $v(x) = x_i$) löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Da die Gleichung linear ist, kann man durch Linearkombinationen neue Lösungen erzeugen. Z.B. $v(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + cx_3$

(iii) $n = 2$, $v(x, y) = e^x \cos y$ löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$$

(iv) $n \geq 1$, $v(x) = \frac{1-|x|^2}{2n}$ (hier: $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$) löst

$$-\Delta v = 1 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

und v ist positiv in $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $v = 0$ auf $\partial B_1(0)$.

Weitere Beispiele

(d) Maxwell-Gleichungen (für elektromagnetische Felder):

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{E}(x,t) & \text{elektrisches Feld} \\ \mathcal{H}(x,t) & \text{magnetisches Feld} \end{array}\right\} x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}, \mathcal{H} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

Zwei weitere Felder:

$$\underbrace{\mathcal{D}}_{\text{el. Flußdichte}} = \epsilon\mathcal{E}, \qquad \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{mag. Flußdichte}} = \mu\mathcal{H}$$

elektrische Leitfähigkeit: $\epsilon = \epsilon_0$(Vakuum)$\cdot\epsilon_r$(Material)

magnetische Suszeptibilität: $\mu = \mu_0$(Vakuum)$\cdot\mu_r$(Material)

Maxwell-System:

$$\boxed{(13) \quad \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 & \operatorname{div} \mathcal{D} = \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \dfrac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 & \operatorname{rot} \mathcal{H} - \dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = j = \text{Stromdichte} \end{array}}$$

gegeben: Funktionen von (x,t): ρ, j, Funktionen von x: ϵ, μ

gesucht: $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{D}, \mathcal{B}$

Spezielle Lösungsansätze

$$(13)\qquad \begin{aligned} \operatorname{div}\mathcal{B} &= 0 & \qquad \operatorname{div}\mathcal{D} &= \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot}\mathcal{E} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} &= 0 & \qquad \operatorname{rot}\mathcal{H} - \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial t} &= j = \text{Stromdichte} \end{aligned}$$

Elektrostatik:

$j = 0$, $\mathcal{H} = \mathcal{B} = 0$, Ladungsdichte $\rho = \rho(x)$ zeitunabhängig.
Ansatz: $\mathcal{E}(x) = \operatorname{grad} u(x)$ ebenfalls zeitunabhängig.

$$\operatorname{div}\mathcal{D} = \operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) = \rho, \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0 \text{ automatisch erfüllt}$$

Im Vakuum gilt $\epsilon = \epsilon_0 = \text{const.}$.
Dann erhalten wir die **Poissongleichung**

$$\epsilon_0 \Delta u = \rho \text{ im } \mathbb{R}^3$$

Spezielle Lösungsansätze – Forts.

$$(13)\qquad \begin{aligned} \operatorname{div}\mathcal{B} &= 0 & \qquad \operatorname{div}\mathcal{D} &= \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot}\mathcal{E} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} &= 0 & \qquad \operatorname{rot}\mathcal{H} - \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial t} &= j = \text{Stromdichte} \end{aligned}$$

Zeitharmonische Felder:

$j = 0$, $\rho = 0$

Ansatz:

$$\mathcal{E}(x,t) = E(x)e^{-i\omega t}, \qquad \mathcal{B}(x,t) = B(x)e^{-i\omega t}$$

Einsetzen in Maxwell führt zu

$$(i) \qquad \operatorname{rot} E(x) - i\omega B(x) = 0 \qquad \Rightarrow \operatorname{div} B = 0,\ \text{da}\ \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$$

$$(ii) \qquad \operatorname{rot}\Big(\underbrace{\frac{1}{\mu}B(x)}_{=H(x)}\Big) + i\omega\,\underbrace{\epsilon E(x)}_{=D(x)} = 0 \qquad \Rightarrow \operatorname{div} D = \operatorname{div}(\epsilon E) = 0$$

Zeitharmonische Felder

$$(i) \qquad \operatorname{rot} E(x) - i\omega B(x) = 0$$

$$(ii) \qquad \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} B(x)\right) + i\omega\epsilon E(x) = 0$$

Aus (i) folgt:

$$B = \frac{-i}{\omega} \operatorname{rot} E$$

Einsetzen in (ii):

Maxwell Eigenwertproblem: $\boxed{(14) \quad \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E\right) - \omega^2 \epsilon E = 0}$

Im Vakuum gilt: $\mu = \mu_0 =$ const., $\epsilon = \epsilon_0 =$ const.. Benutze außerdem

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} E}_{=0} - \Delta E$$

Ergibt:

Helmholtz Gleichung $\boxed{(15) \quad \Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \text{ im } \mathbb{R}^3}$

wobei $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Lösungen der Helmholtzgleichung

Helmholtz Gleichung $\boxed{(15) \quad \Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \text{ im } \mathbb{R}^3}$

Ansatz: $E(x) = e^{ik\cdot x} z$ mit $k, z \in \mathbb{R}^3$ fest

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = ik_j e^{ik\cdot x} z, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2} = -k_j^2 e^{ik\cdot x} z$$

Erfüllt die Helmholtz-Gleichung falls

$$-|k|^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad \text{d.h. } |k| = \frac{\omega}{c}$$

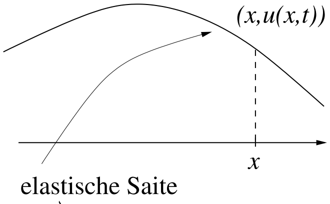
Die resultierenden Lösungen (der ursprüng. Maxwell-Gleichungen)

$$\boxed{\mathcal{E}(x,t) = e^{i(k\cdot x - \omega t)} z, \quad |k| = \tfrac{\omega}{c}}$$

heissen monochromatische, ebene Wellen und beschreiben polarisiertes Licht der Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{\omega}$ und der Frequenz ω.

Weitere Beispiele

(e) Wellengleichung: am Beispiel der schwingenden Saite



$u(x,t) =$ Auslenkung der Saite
ρ = konstante Massendichte
$\mathbb{R}^2 \ni T(x,t)$ = Spannung der Saite
= Vektor, tangential zur Saite

$$\text{Tangente: } \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x,t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Spannung: } T(x,t) = \frac{\tau(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x,t) \end{pmatrix}$$

Idealisierung der elastischen Saite: bei kleinen Auslenkungen

- nur vertikale Bewegung
- keine longitudinale Bewegung

Die schwingende Saite

Spannung: $T(x,t) = \dfrac{\tau(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x,t) \end{pmatrix}$

Ausgleich der longitudinalen Kräfte: für $x_1 < x$:

$$\frac{\tau(\xi,t)}{\sqrt{1+u_x^2(\xi,t)}}\Bigg|_{x_1}^{x} = 0 \Rightarrow \frac{\tau}{\sqrt{1+u_x^2}} = \text{const.} = \lambda$$

Newtonsches Kraftgesetz $F = ma$ für vertikale Bewegung:

$$\frac{\tau(\xi,t)u_x(\xi,t)}{\sqrt{1+u_x^2(\xi,t)}}\Bigg|_{x_1}^{x} = \int_{x_1}^{x} \rho u_{tt}(\xi,t)\,d\xi$$

d.h.

$$\lambda\big(u_x(x,t) - u_x(x_1,t)\big) = \int_{x_1}^{x} \rho u_{tt}(\xi,t)\,d\xi$$

Differentiation nach x:

1-d Wellengleichung: $\boxed{(16) \quad u_{xx}(x,t) = \frac{\rho}{\lambda}u_{tt}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2}$

Die schwingende Saite

1-d Wellengleichung: $$\boxed{(16) \quad u_{xx}(x,t) = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2}$$

Spezielle Lösung z.B.: $u(x,t) = \sin(x - ct)$ mit $c^2 = \frac{\lambda}{\rho}$.

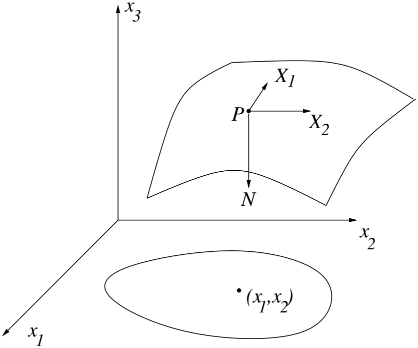
2-d Wellengleichung:

$$\boxed{(17) \quad u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \mathbb{R}^3}$$

n-dimensionale Wellengleichung: $$\boxed{(18) \quad \Delta u = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}}$$

Weitere Beispiele

(f) Krümmung von Funktionsgraphen



$u(x_1, x_2)$= Höhe der Fläche über der x_1, x_2-Ebene

$P = (x_1, x_2, u(x_1, x_2))$
Beschreibung als Funktionsgraph

Die Tangentialebene in P wird aufgespannt von zwei Vektoren

$$X_1 = (1, 0, u_{x_1})^T, \quad X_2 = (0, 1, u_{x_2})^T$$

Dabei

$$X_1 = \frac{d}{dx_1}\Big(x_1, x_2, u(x_1, x_2)\Big)^T, \quad X_2 = \frac{d}{dx_2}\Big(x_1, x_2, u(x_1, x_2)\Big)^T$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}}(u_{x_1}, u_{x_2}, -1)^T$$

Krümmung von Funktionsgraphen

$$X_1 = (1, 0, u_{x_1})^T, \quad X_2 = (0, 1, u_{x_2})^T, \quad N = \frac{1}{\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}}(u_{x_1}, u_{x_2}, -1)^T$$

Offenbar gilt

$$|N|^2 = 1 \quad \text{und } N \cdot X_1 = N \cdot X_2 = 0$$

Krümmung

Die Krümmung der Fläche wird gemessen durch die Veränderung der Normalen.

$$N_{x_1} := \frac{\partial N}{\partial x_1}, \quad N_{x_2} := \frac{\partial N}{\partial x_2}$$

Diese beiden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ lassen sich durch die Basis X_1, X_2, N im Punkt P darstellen:

$$\begin{aligned} N_{x_1} &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \lambda N \\ N_{x_2} &= \gamma X_1 + \delta X_2 + \mu N \end{aligned}$$

Krümmung von Funktionsgraphen

$$(*)\qquad \begin{cases} N_{x_1} &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \lambda N \\ N_{x_2} &= \gamma X_1 + \delta X_2 + \mu N \end{cases}$$

Bestimme λ, μ durch Skalar-Multiplikation mit N. Beachte

$$N_{x_1} \cdot N = N_{x_2} \cdot N = 0 \text{ folgt aus Differentiation von } N \cdot N = 1$$

d.h. $\lambda = \mu = 0$

Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: Für $i, j = 1, 2$

$$g_{ij} := X_i \cdot X_j, \qquad h_{ij} := N \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial N}{\partial x_j} \cdot X_i$$

letzeres folgt aus Differentiation von $N \cdot X_i = 0$ nach x_j.

Auflösen des LGS $(*)$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = -(g_{ij})^{-1}_{i,j=1,2} (h_{ij})_{i,j=1,2}$$

Krümmung von Funktionsgraphen

Auflösen des LGS $(*)$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = -(g_{ij})^{-1}_{i,j=1,2}(h_{ij})_{i,j=1,2}$$
$$= \begin{pmatrix} |X_1|^2 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & |X_2|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{x_1} \cdot X_1 & N_{x_2} \cdot X_1 \\ N_{x_1} \cdot X_2 & N_{x_2} \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$spur bzw. Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

nennet man **mittlere Krümmung** H bzw. **Gaußsche Krümmung** K der Fläche im Punkt $P = \big(x_1, x_2, u(x_1, x_2)\big)$.

Krümmung von Funktionsgraphen

Einsetzen der Ausdrücke für $X_1, X_2, N_{x_1}, N_{x_2}$ in

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |X_1|^2 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & |X_2|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{x_1} \cdot X_1 & N_{x_2} \cdot X_1 \\ N_{x_1} \cdot X_2 & N_{x_2} \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

liefert

$$H = \frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + u_{x_1}^2) u_{x_2 x_2} + (1 + u_{x_2}^2) u_{x_1 x_1} - 2 u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2}}{(1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \quad \text{Rechnung!}$$

$$K = \alpha\delta - \beta\gamma = \frac{u_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2} - (u_{x_1 x_2})^2}{(1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^2}$$

$$= \det\left(\frac{D^2 u}{1 + |\nabla u|^2} \right)$$

Krümmung von Funktionsgraphen

Nun stellt man sich folgendes Problem: wie sieht eine Fläche aus, deren mittlere Krümmung/Gaußsche Krümmung vorgegeben ist?

Z.B. bei konstanter mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung sucht man Lösungen der folgenden partiellen DGlen:

konstante mittlere Krümmung:

$$\boxed{(19) \qquad \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = H = \text{const.}}$$

konstante Gaußsche Krümmung:

$$\boxed{(20) \qquad \det\left(\frac{D^2 u}{1+|\nabla u|^2}\right) = K = \text{const.}}$$