Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2012/2013

Partielle Differentialgleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Finden Sie für die folgenden partiellen Differentialgleichungen jeweils eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}^k$, ($D \subset \mathbb{R}^N$, k, N geeignet) so dass

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n}\right) = 0$$

gilt, falls $u(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Bestimmen Sie die Ordnung der Differentialgleichung und prüfen Sie, ob es sich um eine lineare Gleichung handelt.

a) Schrödinger-Gleichung: $i\hbar u_t + \frac{\hbar}{2m}\Delta u = V(x, y, z)u$, wobei $\hbar, m$ konstant, $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben

b) biharmonische Gleichung: $\Delta\Delta u = f(x, y)$ mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben

c) Navier-Stokes Gleichung: $\rho \vec{u}_t + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \mu\Delta\vec{u} - \nabla p,\ \nabla \cdot \vec{u} = 0$, wobei μ, ρ gegebene Konstanten und $\vec{u} \cdot \nabla = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; gesucht: $\vec{u}, p$

d) Korteweg-de Vries Gleichung: $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$

f) Black-Scholes-Gleichung: $u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0$, wobei σ, r gegebene Konstanten

Aufgabe 2

Im Folgenden sei u zweimal stetig differenzierbar und $v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{div}\operatorname{rot} u = 0 \quad (u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$

b) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0 \quad (u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$

c) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \operatorname{grad}\operatorname{div} u - \Delta u \quad (u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$, wobei $\Delta u = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}$ für $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

d) $\operatorname{div}(v \times w) = w \cdot \operatorname{rot} v - v \cdot \operatorname{rot} w$

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Es seien $E : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ und $B : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ Lösungen der beiden Maxwell Gleichungen

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t},$$

d.h. die Stromdichte j verschwindet.
Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} E$ und $\operatorname{div} B$ unabhängig von t sind. Folgern Sie, dass in einem elektrodynamischen System, welches alle vier Maxwell-Gleichungen erfüllt, das Verschwinden der Stromdichte die Zeitunabhängigkeit der Ladungsdichte impliziert.

Aufgabe 4

Leiten Sie aus den Wellengleichungen für die Potentiale ϕ und A der Lorentz Eichung Wellengleichungen für E und B her.

Besprechung in der Übung am 24.10.2012.