Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2012/2013

Partielle Differentialgleichungen
10. Übungsblatt

Aufgabe 35

Es seien $u_1, \ldots, u_n$ Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0)$. Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = u(x_1, \ldots, x_n, t) := \prod_{i=1}^{n} u_i(x_i, t)$$

eine Lösung der n-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ ist.

Aufgabe 36

Bestimmen Sie eine Lösung des Cauchy-Problems für die folgende verallgemeinerte Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - V \cdot \nabla u + g(t)u = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T))$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

mit $V \in \mathbb{R}^n$, $g \in C([0,\infty))$; $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ sei stetig und erfülle die Voraussetzungen von Satz 4.1., T sei wie in Satz 4.1. definiert.

Hinweis: Führen Sie die gegebene Differentialgleichung mittels der Transformation $v(x,t) = u(x - tV, t)$ und $w(x,t) = \psi(t)v(x,t)$ auf die klassische Wärmeleitungsgleichung zurück.

Aufgabe 37

Die Funktion $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ habe kompakten Träger, d.h. $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n :\ \varphi(x) \neq 0\}}$ ist kompakt. Weiter sei $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ die durch

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi$$

definierte Lösung des Cauchy-Problems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0), \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

(siehe Satz 4.1). Zeigen Sie: u erfüllt $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^n$.

Bitte wenden!

Aufgabe 38

Es sei $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^n)$ so, dass φ und alle Ableitungen bis zur Ordnung k beschränkt auf $\mathbb{R}^n$ sind. u sei wie in Aufgabe 37 die Lösung des Cauchy-Problems.
Definiere $D_x^{(\nu)} = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \cdots \partial x_n^{\nu_n}}$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n, |\nu| = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$. Zeigen Sie:

a) Für $\nu \leq k$ gilt: $(D_x^{(\nu)} u)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t)(D_\xi^{(\nu)} \varphi)(\xi)\, d\xi \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0)$

b) $D_x^{(\nu)} u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ für $|\nu| \leq k$.

c) Welche Ergebnisse erhalten Sie für Ableitungen bezüglich t und für gemischte Ableitungen?

Besprechung in der Übung am 9.1.2013.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und ein erfolgreiches Jahr 2013.