Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2012/2013

Partielle Differentialgleichungen
11. Übungsblatt

Aufgabe 39

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $Q = \Omega \times (0,T)$ und $u \in C^2(\overline{Q})$ erfülle

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0 \quad \text{in} \quad Q. \qquad (*)$$

Geben Sie einen alternativen Beweis des Maximumprinzips

$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{\partial' Q} u$$

mit Hilfe der folgenden Energiemethode: Sei $M := \max\limits_{\partial' Q} u$, $\psi(y) = \max\{y - M, 0\}^4$ $(y \in \mathbb{R})$. Beweisen Sie nacheinander die folgenden Aussagen

a) $\psi(u) \in C^2(\overline{Q})$

b) $\frac{\partial \psi(u)}{\partial t} - \Delta(\psi(u)) \leq 0$ auf Q

c) $t \mapsto \int_\Omega \psi(u(x,t))\, dx$ ist monoton fallend

d) $u(x,t) \leq M$ für $(x,t) \in Q$.

Können Sie die Voraussetzung $u \in C^2(\overline{Q})$ abschwächen?

Aufgabe 40

Gegeben sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) &= w(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T) \\ u(x,0) &= \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

wobei $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ und $T > 0$ die Voraussetzungen von Satz 4.1. erfüllen und $w \in C(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ gilt.

a) Wenden Sie die Methode von Duhamel (zur Erinnerung: siehe Wellengleichung) auf die inhomogene Wärmeleitungsgleichung an. Unter welchen Voraussetzungen an w liefert die durch diese Methode definierte Funktion tatsächlich eine Lösung?

b) Bestimmen Sie eine Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung für den Fall $n = 1$, $w(x,t) = x^2 t^2$, $\varphi(x) = x^2$.

Bitte wenden!

Aufgabe 41

Es sei $g \in C^1([a,b])$ und $g'(x) < 0$ für $x \in [a,b]$. Betrachten Sie die Kurve $\Gamma = \{(x, g(x)) : \; x \in (a,b)\}$ und das Anfangswertproblem

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = r(x,y) \quad \text{für} \;\; (x,y) \in (a,b) \times (g(b), g(a)), \\ u(x, g(x)) = U(x), \quad \tfrac{\partial u}{\partial x}(x, g(x)) = U_1(x), \quad \tfrac{\partial u}{\partial y}(x, g(x)) = U_2(x) \quad \text{für} \;\; x \in (a,b) \end{gathered}$$

wobei $r \in C(\mathbb{R}^2)$, $U \in C^1([a,b])$, $U_1, U_2 \in C([a,b])$ und $U'(x) = U_1(x) + g'(x) U_2(x)$ für $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt und stellen Sie diese in Integralform dar.

Aufgabe 42

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{gathered} a(x,y,u,\tfrac{\partial u}{\partial x},\tfrac{\partial u}{\partial y})\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,u,\tfrac{\partial u}{\partial x},\tfrac{\partial u}{\partial y})\tfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y,u,\tfrac{\partial u}{\partial x},\tfrac{\partial u}{\partial y})\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x,y,u,\tfrac{\partial u}{\partial x},\tfrac{\partial u}{\partial y}), \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x(t), y(t)) = U(t), \quad \tfrac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) = U_1(t), \quad \tfrac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) = U_2(t), \quad t \in (t_0, t_1), \end{gathered}$$

wobei $a, b, c \in C^k(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ glatt. Die Kurve $\Gamma = \{(x(t), y(t)) : \;\; t \in (t_0, t_1)\}$ sei nichtcharakteristisch und $u \in C^k(\Omega)$ sei eine Lösung des Anfangswertproblems. Zeigen Sie, dass alle Ableitungen von u bis zur Ordnung k auf Γ durch die Daten U, U_1, U_2, sowie $\dot{x}, \dot{y}$ und a, b, c bestimmt werden können (ohne die Lösung u explizit zu kennen).

Besprechung in der Übung am 16.1.2013.