Karlsruher Institut für Technologie WS 2012/2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Partielle Differentialgleichungen
12. Übungsblatt

Aufgabe 43

Bestimmen Sie den Typ sowie alle Charakteristiken der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$ (Tricomi-Gleichung)

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$
Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh} x$.

Aufgabe 44

Betrachten Sie die Minimalflächengleichung auf dem Kreisring

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; r_1 < \sqrt{x^2+y^2} < r_2\}, \quad 0 < r_1 < r_2$$

Die in der Vorlesung gestellte Bedingung, dass Ω einfach zusammenhängend sei, wird hier fallengelassen. Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen der Differentialgleichung. Für welche $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige Randwertaufgabe mit

$$u = \varphi_1 \text{ auf } \Gamma_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \sqrt{x^2+y^2} = r_1\}, \quad u = \varphi_2 \text{ auf } \Gamma_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \sqrt{x^2+y^2} = r_2\}$$

lösbar?

Aufgabe 45

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und einfach zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet und $r \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung die Eulersche Differentialgleichung für die folgenden Variationsprobleme:

a) Minimiere $J[u] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - ru\right) dx$ auf $\{u \in C^2(\overline{\Omega}) : \; u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$

b) Minimiere $J[u] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - ru\right) dx$ auf $C^2(\overline{\Omega})$

Besprechung in der Übung am 23.1.2013.