Karlsruher Institut für Technologie WS 2012/2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Partielle Differentialgleichungen
14. Übungsblatt

Aufgabe 49

Beweisen Sie Satz 6.1 aus der Vorlesung in der angegebenen allgemeinen Formulierung.
Hinweis: Verwenden Sie als Gewichtsfunktion

$$\exp(K(|x - h(y)| + |y - g(x)|)).$$

Aufgabe 50

Es sei $g \in C^1([a,b])$ mit $g(a) = 0$, $g' > 0$ in $[a,b]$.
Weiter sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a < x < b,\ 0 < y < g(x)\}$. Sind die Kurven $\Gamma_1 := \{(x,0) :\ x \in [a,b]\}$ bzw. $\Gamma_2 := \{(x,g(x)) :\ x \in [a,b]\}$ nichtcharakteristisch?

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) & = & d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) & = & \varphi(x), & x \in [a,b] \\ u(x,g(x)) & = & \psi(x), & x \in [a,b], \end{cases}$$

wobei $d : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig sei und eine Lipschitzbedingung der Form

$$|d(x,y,u,p,q) - d(x,y,\tilde{u},\tilde{p},\tilde{q})| \leq L\,(|u - \tilde{u}| + |p - \tilde{p}| + |q - \tilde{q}|)$$

mit $L > 0$ erfülle. Weiter gelten $\varphi, \psi \in C^1([a,b])$ sowie $\varphi(a) = \psi(a)$.
Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Problem $(*)$ eine eindeutige Lösung u besitzt, für die gilt: $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C(\Omega)$.

Besprechung in der Übung am 6.2.2013.