Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2012/2013

Partielle Differentialgleichungen
2. Übungsblatt

Aufgabe 5

a) Sei $v \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} v = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^1 x \cdot v(tx)\, dt$$

stetig differenzierbar ist und $\operatorname{grad} \Phi = v$ gilt.

b) Sei $w \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} w = 0$. zeigen Sie, dass

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \left(\int_0^1 tw(tx)\, dt \right) \times x$$

stetig differenzierbar ist und $\operatorname{rot} A = w$ gilt.

Aufgabe 6

Gegeben sei $u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad |u(x)| \leq \frac{c}{|x|^3 + 1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3 \quad (c \in \mathbb{R} \text{ fest})$$

sowie $\operatorname{div} u \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\operatorname{div} u)(x)\, dx = 0.$$

Hinweis: Integrieren Sie über Kugeln $B_R(0)$ und betrachten Sie $R \to \infty$.

Aufgabe 7

Es sei $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix und $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\Delta(u \circ T)(x) = \Delta u(Tx) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Aufgabe 8

Es sei $u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ eine Lösung der inkompressiblen, stationären Euler-Gleichung (Spezialfall der Navier-Stokes-Gleichungen, vgl. Aufgabe 1c))

$$\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

(mit konstanter Dichte $\rho > 0$). Weiter gelte $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 + p$ konstant ist (Gesetz von Bernoulli: Die Summe von Staudruck und hydrostatischem Druck ist konstant).

Besprechung in der Übung am 30.10.2012.