Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2012/2013

Partielle Differentialgleichungen
3. Übungsblatt

Aufgabe 9

Es sei u eine Lösung der n-dimensionalen Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ von der Form $u(x,t) = v(|x|,t)$, wobei $v \in C^2\left([0,\infty) \times [0,\infty), \mathbb{R}\right)$. u heißt dann sphärische Welle.

a) Zeigen Sie, dass $v = v(r,t)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}.$$

b) Leiten Sie eine Differentialgleichung für die Funktion $U(r,t) := v(r,t)r^{\frac{n-1}{2}}$ her.

c) Geben Sie im Fall $n = 3$ eine allgemeine Lösungsformel für sphärische Wellen an.

d) Geben Sie im Fall $n = 3$ und $t < r$ diejenige sphärische Welle an, die die Anfangsdaten

$$u(r,0) = u_0(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = u_1(r) \quad (0 < r < \infty)$$

erfüllt ($u_0, u_1 \in C^2((0,\infty))$ gegeben).

e) Es seien $u_i \in C^2([0,\infty))$ und $u_i'(0) = 0$, $(i = 0,1)$. Lösen Sie das Anfangswertproblem in d) für alle $r > 0,\ t \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung u für $r \to 0$ beschränkt bleibt.

Aufgabe 10

Stehende Wellen sind Lösungen der Wellengleichung von der Form $u(x,t) = v(x)\sin(\omega t + \varphi)$, wobei $\omega > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

a) Leiten Sie eine Differentialgeichung für v her.

b) Sei $n = 1$. Bestimmen Sie alle stehenden Wellen. Stellen Sie jede stehende Welle als Überlagerung einer nach rechts laufenden und einer nach links laufenden wandernden Welle dar.

c) Berechnen Sie im Fall $n = 3$ alle stehenden sphärischen Wellen, d.h. alle Lösungen von der Form

$$u(x,t) = v(|x|)\sin(\omega t + \varphi),$$

wobei $v \in C^2((0,\infty))$.

Bitte wenden!

Aufgabe 11

Es sei u eine Lösung der eindimensionalen homogenen Wellengleichung mit Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$. Hierbei seien $u_0, u_1 \in C^2(\mathbb{R})$ und es existiere ein $R > 0$ mit $u_0(x) = u_1(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$. Zeigen Sie, dass ein $t_0 > 0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx \quad \text{für alle } t > t_0,$$

d.h. ab einer Zeit $t > t_0$ sind kinetische und potentielle Energie gleich.

Besprechung in der Übung am 7.11.2012.