**Karlsruher Institut für Technologie**
**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2012/2013

# Partielle Differentialgleichungen
# 5. Übungsblatt

## Aufgabe 15

a) Lösen Sie mit Hilfe der Methode von Duhamel das folgende Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung:

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = w(x,t) & \text{in} \quad \mathbb{R} \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Seien nun $w(x,t) = x^2$, $u_0(x) = x$, $u_1(x) = 0$. Geben Sie eine explizite Lösung von $(*)$ an.

## Aufgabe 16

Es sei $\Omega = (0,a)$ $(a > 0)$ und $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$, $u_0'(0) = u_0'(a) = 0$.
Verwenden Sie einen Separationsansatz um eine Lösung des folgenden Anfangsrandwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung zu finden:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0 & \text{für} \quad t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in} \quad \Omega \end{cases}$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$? Interpretieren Sie das Resultat physikalisch.
*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi \frac{x}{a})$, wobei die Reihe gleichmäßig konvergent ist und $a_n = \frac{2}{a}\int_0^a u_0(x)\cos(n\pi\frac{x}{a})\,dx$ für $n \neq 0$, $a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a u_0(x)\,dx$ gilt.

## Aufgabe 17

Es sei $u \in C^4(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, $c > 0$, $c \neq 1$ und

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = 0.$$

Zeigen Sie, dass Funktionen $g_i \in C^4(\mathbb{R})$, $i = 1,\dots,4$ existieren, so dass

$$u(x,t) = g_1(x+ct) + g_2(x-ct) + g_3(x+t) + g_4(x-t).$$

Bitte wenden!

**Aufgabe 18**

Es sei $u \in C^2((0,\infty) \times (0,\infty))$ eine Lösung von

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \quad (x, y > 0).$$

Zeigen Sie, dass Funktionen $F, G \in C^2((0,\infty))$ existieren, so dass

$$u(x,y) = F(xy) + x\, G\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y > 0).$$

*Hinweis:* Führen Sie geeignete charakteristische Koordinaten $\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y)$ ein.

Besprechung in der Übung am 21.11.2012.