Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2012/2013

Partielle Differentialgleichungen
6. Übungsblatt

Aufgabe 19

Es sei $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ $(a,b>0)$. Finden Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes Eigenwerte und Eigenfunktionen des folgenden Problems (mit periodischen Randbedingungen):

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} &= \lambda u \quad \text{in } \Omega \\ u(0,y) = u(a,y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a,y), \quad y \in (0,b) \\ u(x,0) = u(x,b),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,b), \quad x \in (0,a) \end{aligned}$$

Aufgabe 20

a) Im $\mathbb{R}^2$ sind Polarkoordinaten durch $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ gegeben. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Zeigen Sie:

$$(\Delta u)(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi).$$

b) Im $\mathbb{R}^3$ sind Kugelkoordinaten gegeben durch $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$. Leiten Sie die Darstellung des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten her.

Aufgabe 21

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega$ Lipschitz-stetig und $c \in C(\overline{\Omega})$ erfülle $c(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$.

a) Zeigen Sie, dass das erste Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

nur die triviale Lösung besitzt.

b) Zeigen Sie, dass das zweite Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

nur die triviale Lösung besitzt, falls $c(\xi) > 0$ für ein $\xi \in \Omega$ gilt. Welche nichttrivialen Lösungen treten im Fall $c \equiv 0$ auf?

Bitte wenden!

c) Es sei $\gamma : \partial\Omega \to [0,\infty)$ stetig. Welche a) und b) entsprechenden Aussagen können Sie für das dritte Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

treffen?

Aufgabe 22

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet und $r \in C(\overline{\Omega})$, $\phi \in C(\partial\Omega)$. Zeigen Sie, dass die Gleichheit

$$\int_\Omega r\,dx = \int_{\partial\Omega} \phi\,d\sigma$$

eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = r & \text{in} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \phi & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

ist.

Besprechung in der Übung am 28.11.2012.