Karlsruher Institut für Technologie WS 2012/2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Partielle Differentialgleichungen
7. Übungsblatt

Aufgabe 23

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet und die Greensche Funktion G für das erste Randwertproblem der Poissongleichung in Ω existiere. Zeigen Sie, dass $G(\xi, x)$ symmetrisch bezüglich x und ξ ist, d.h. es gilt

$$G(\xi, x) = G(x, \xi) \quad \text{für alle} \;\; x, \xi \in \Omega.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\int_\Omega (g_1 \Delta g_2 - g_2 \Delta g_1)\, dx$ wobei $g_i(x) = G(\xi_i, x)$ und $\xi_i \in \Omega$ für $i = 1, 2$.

Aufgabe 24

Bestimmen Sie die Greensche Funktion des ersten Randwertproblems für die Poissongleichung auf der Kreisscheibe $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; |x| < R\}$.

Aufgabe 25

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet. Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion für das erste Randwertproblem der Poissongleichung auf Ω eindeutig ist.

Aufgabe 26

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Weiter sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie:

   (i) u harmonisch $\Rightarrow$ $f(u)$ subharmonisch

   (ii) Ist f zusätzlich monoton wachsend, so gilt:
   u subharmonisch $\Rightarrow$ $f(u)$ subharmonisch

b) Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$ auf $B_1(0)$, bzw. auf $B_1(0)\backslash\{0\}$ falls $\alpha < 0$. Bestimmen Sie diejenigen α, für die die Funktion subharmonisch bzw. superharmonisch ist

Besprechung in der Übung am 5.12.2012.