Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2012/2013

Partielle Differentialgleichungen
8. Übungsblatt

Aufgabe 27

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $n \geq 2$, $x_0 \in \Omega$ und $u : \Omega \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch. x_0 heißt hebbare Singularität von u, falls eine harmonische Funktion $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit $\tilde{u}(x) = u(x)$ für alle $x \in \Omega \backslash \{x_0\}$. Zeigen Sie:

a) Gilt
$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{S(x_0, x)} = 0,$$
so ist x_0 eine hebbare Singularität von u.

b) Gilt
$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{S(x_0, x)} = c,$$
für ein $c \in \mathbb{R}$, so gilt $u(x) = cS(x_0, x) + v(x)$ mit einer harmonischen Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 28

Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $\Omega \subset B_R(x_0)$. Weiter seien $q \in C(\overline{\Omega})$, $\phi \in C(\partial\Omega)$ und
$$\overline{K} := \max_{x \in \overline{\Omega}} \{q(x), 0\}, \ \underline{K} = \min_{x \in \overline{\Omega}} \{q(x), 0\}, \ \overline{M} := \max_{x \in \partial\Omega} \phi(x), \ \underline{M} := \min_{x \in \partial\Omega} \phi(x).$$
Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Randwertproblems
$$-\Delta u = q \ \text{ in } \Omega, \quad u = \phi \ \text{ auf } \partial\Omega,$$
so gilt für alle $x \in \overline{\Omega}$ die folgende Ungleichung:
$$\underline{M} + \frac{\underline{K}}{2n}\left(R^2 - |x - x_0|^2\right) \leq u(x) \leq \overline{M} + \frac{\overline{K}}{2n}\left(R^2 - |x - x_0|^2\right).$$

Aufgabe 29

Beweisen Sie die Ungleichung von Harnack: Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Ist u harmonisch in Ω und gilt $u(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$, so folgt
$$\frac{1 - \frac{|x|}{R}}{\left(1 + \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 + \frac{|x|}{R}}{\left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}} u(0), \qquad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 30

Es sei $R > 0$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch mit $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

a) Beweisen Sie: $\sup\limits_{\Omega} |u| = \max\limits_{\partial\Omega} |u|$.

b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Ungleichung in a) nicht gelten muss, falls die Bedingung $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ fallen gelassen wird.

Besprechung in der Übung am 12.12.2012.