Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2012/2013

Partielle Differentialgleichungen
9. Übungsblatt

Aufgabe 31

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, sowie N eine offene Umgebung eines Randpunktes $\xi \in \partial\Omega$. Wir nennen w lokale Barrierenfunktion im Punkt ξ, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $w \in C(\overline{\Omega} \cap N)$ ist subharmonisch in $\Omega \cap N$

(ii) $w < 0$ in $(\overline{\Omega} \cap N) \backslash \{\xi\}$

(iii) $w(\xi) = 0$

Zeigen Sie: Falls im Punkt $\xi \in \partial\Omega$ eine lokale Barrierenfunktion existiert, so existiert in diesem Punkt auch eine - wie in der Vorlesung definierte - Barrierenfunktion.

Hinweis: Sei $B_\rho(\xi)$ eine Kugel um ξ mit ρ genügend klein und $m \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt. Betrachten Sie die Funktion

$$\overline{w}(y) := \begin{cases} \max\{m, w(x)\}, & x \in \overline{\Omega} \cap B_\rho(\xi) \\ m, & x \in \overline{\Omega} \backslash B_\rho(\xi). \end{cases}$$

Aufgabe 32

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfülle eine äußere Kugelbedingung. Zeigen Sie, dass in jedem Punkt $\xi \in \partial\Omega$ eine Barrierenfunktion existiert.
Hinweis: Singularitätenfunktion.

Aufgabe 33

$K \subset \mathbb{R}^2$ heißt Kegel mit Öffnungswinkel $\alpha > 0$, falls K durch eine euklidische Bewegung (Rotation und Translation) in die Menge

$$K_0 = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : \ 0 < r < \infty, \ 0 < \varphi < \alpha\}$$

überführt werden kann.
Es sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Im Punkt $\xi \in \partial\Omega$ erfülle Ω die folgende Bedingung: Es existiert ein Kegel K mit $K \subset \Omega^c$, $\overline{K} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$. Zeigen Sie, dass in ξ eine lokale Barrierenfunktion existiert.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $w(r, \varphi) = r^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{2\pi-\alpha}\varphi\right)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 34

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $M > 0$ und $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega})$ eine Folge harmonischer Funktionen mit

$$|u_j(x)| \leq M \quad \text{für alle } \; x \in \overline{\Omega}, \; j \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass eine Teilfolge $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $u \in C(\Omega)$ existiert, so dass für alle offenen, beschränkten Teilmengen $U \subset \Omega$ mit $\overline{U} \subset \Omega$ gilt:

$$u_{j_k} \longrightarrow u \quad \text{gleichmäßig in } \; U.$$

Hinweis: Satz 3.13 aus der Vorlesung und Arzéla-Ascoli.

Besprechung in der Übung am 19.12.2012.