Skript zur Vorlesung

Klassische Methoden für partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

WS 2018/19

In LaTeX gesetzt von Lena Martin

Version vom 22. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript basiert auf den regelmässig von mir in Karlsruhe gehaltenen Vorlesungen *Klassische Methoden für partielle Differentialgleichungen*. Es wurde von Frau Lena Martin erstmals im Wintersemester 2014/15 in LaTeX gesetzt. Ich danke Frau Martin herzlich für ihre Arbeit und Mühe und bin über das Ergebnis sehr glücklich. Ich danke auch meinem Kollegen Prof. Tomáš Dohnal, der im Rahmen seiner eigenen, inhaltlich ähnlichen Vorlesung *Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen* an der TU Dortmund Teile dieses Skriptes sehr gründlich durchgesehen hat und dabei auf zahlreiche (inzwischen korrigierte) Tippfehler gestoßen ist. Auch die Höhrer vergangener Vorlesungen haben viele Vorschläge zur Verbesserung des Skriptes beigetragen. Diese Vorschläge sind dankenswerterweise von Herrn Elias Gasmi rechtzeitig zum Beginn des Wintersemesters 2018/19 umgesetzt worden.

Beim Durchblättern des Skriptes fällt sofort auf, dass es kein Kapitel 1 gibt. Das liegt daran, dass Kapitel 1 in Form von Beamer-Slides vorliegt, die ich in den ersten beiden Vorlesungsstunden benutze. Inhaltlich geht es in Kapitel 1 darum, die Notation einzuführen, eine Anzahl von Beispielen partieller Differentialgleichungen zu geben und einige Anmerkungen zu den dazugehörigen physikalischen Modellen zu machen.

Desweiteren gibt es ingesamt drei Zusammenfassungen (ohne Beweise) von Definitionen und Sätzen zu bestimmten Themenfeldern. Sie sind dazu gedacht, alle Höhrerinnen und Höhrer auf einen einheitlichen Wissensstand zu bringen hinsichtlich der Themenfelder *Gaußscher Integralsatz*, *Oberflächenintegrale* und *Vertauschung von Grenzübergängen*. Alle drei Themenfelder sind unabdingbare, sehr wichtige Bestandteile vieler Beweise.

Karlsruhe, im Wintersemester 2018/2019

Wolfgang Reichel

KAPITEL 2

Transport- und Wellengleichung

2.1 Wiederholung einiger Definitionen, Sätze und Begriffe

Wiederholung zu C^1-Gebieten, Gaußschem Integralsatz, Greenschen Formeln und Funktionenräumen vgl. Handout im Anhang A.1.

Definition 2.1 (Gebiet und Wegzusammenhang)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ω heißt zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\forall U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = \Omega$ folgt $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$. Eine offene, zusammenhängende Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet man als Gebiet.

Bemerkung Eine offene Menge ist zusammenhängend genau dann wenn sie wegzusammenhängend ist, d.h., für je zwei Punkte $P, Q \in \Omega$ gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega, \gamma(0) = P, \gamma(1) = Q$.

Definition 2.2 (Funktionenräume)
Sei $k \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$\begin{aligned}
C(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ stetig in } \Omega\}\\
C(\overline{\Omega}) &:= \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, f \text{ stetig in } \overline{\Omega}\}\\
C^k(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ und } D^\alpha f \text{ ex. und sind stetig auf } \Omega \text{ für jeden Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \le k\}\\
C^k(\overline{\Omega}) &:= \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, f \in C^k(\Omega), f \text{ und } D^\alpha f \text{ sind stetig auf } \overline{\Omega} \text{ fortsetzbar}\\
&\qquad \text{für jeden Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \le k\}
\end{aligned}$$

Für Teilmengen des Raum-Zeit $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ benutzt man andere Räume.

Definition 2.3
Sei $D \subset \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ offen und $k, \ell \in \mathbb{N}_0$.

(a)

$$C^{k,\ell}(D) := \left\{ \begin{array}{l} v : D \to \mathbb{R} : v \text{ und } D^\alpha v \text{ ex. und sind stetig auf } D \text{ für alle} \\ \text{Multi-Indizes } \alpha = (\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{\text{bzgl. } x-\text{Var.}}, 0) \text{ und für alle} \\ \text{Multi-Indizes } \alpha = (0, \ldots, 0, \underbrace{\alpha_{n+1}}_{\text{bzgl. } t-\text{Var.}}), \quad |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \le k, |\alpha_{n+1}| \le \ell \end{array} \right\}$$

(b) *Sei $D \subset \widetilde{D} \subset \overline{D}$*

$$C^{k,\ell}(\widetilde{D}) := \left\{ \begin{array}{l} v : \widetilde{D} \to \mathbb{R} : v \in C^{k,\ell}(D), v \text{ und } D^\alpha v \text{ sind stetig fortsetzbar auf } \widetilde{D} \text{ für alle} \\ \text{Multi-Indizes } \alpha = (\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{\text{bzgl. } x-\text{Var.}}, 0) \text{ und für alle} \\ \text{Multi-Indizes } \alpha = (0, \ldots, 0, \underbrace{\alpha_{n+1}}_{\text{bzgl. } t-\text{Var.}}), \quad |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \le k, |\alpha_{n+1}| \le \ell \end{array} \right\}$$

2.2 Transportgleichung

Die folgende partielle Differentialgleichung heisst Transportgleichung:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u = f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ \qquad u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

gegeben: $b \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

gesucht: $u \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

Homogener Fall: $f \equiv 0$.

Angenommen u ist eine Lösung. Sei $x \in \mathbb{R}^n, t \ge 0$ fest. Definiere die Funktion

$$z : \begin{cases} [-t, \infty) \to \mathbb{R} \\ \qquad s \mapsto u(x + sb, t + s) \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds}(s) = \dot{z}(s) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + sb, t + s) b_i + \frac{\partial u}{\partial t}(x + sb, t + s) \\ &= \nabla u(x + sb, t + s) \cdot b + \frac{\partial u}{\partial t}(x + sb, t + s) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z$ ist konstant.

D.h., u ist konstant entlang von Geraden $s \mapsto (x+sb, t+s)$. Außerdem gilt

$$\left.\begin{aligned} z(-t) &= u(x-tb,0) = g(x-tb) \\ z(0) &= u(x,t) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \text{„=“ da } z \text{ konstant}$$

Folgerung: Notwendigerweise muss also $u(x,t) = g(x-tb)\, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$ gelten.

Satz 2.4
Sei $f \equiv 0, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u(x,t) := g(x-tb)$ für $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ die eindeutige $C^{1,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ Lösung des Anfangswertproblems (1) der Transportgleichung.

Beweis. Nachrechnen. □

Inhomogener Fall: Definiere z wie zuvor im homogenen Fall. Nun gilt

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= f(x+sb, t+s) \\ z(s) &= z(0) + \int_0^s f(x+\sigma b, t+\sigma)\, d\sigma, \quad s \geq -t. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Wie zuvor gilt auch hier:

$$\begin{aligned} z(-t) &= u(x-tb,0) = g(x-tb) \\ z(0) &= u(x,t). \end{aligned}$$

Setze $s = -t$ in ($*$):

$$u(x,t) = z(0) = z(-t) - \int_0^{-t} f(x+\sigma b, t+\sigma)\, d\sigma \overset{\tau:=t+\sigma}{=} g(x-tb) + \int_0^t f(x+(\tau-t)b, \tau)\, d\tau.$$

Damit wurde die Form der Lösung bestimmt (wohlgemerkt: unter der Annahme, dass eine Lösung u existiert).

Satz 2.5
Sei $f \in C^{1,0}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)), g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$u(x,t) = g(x-tb) + \int_0^t f(x+(\tau-t)b, \tau)\, d\tau$$

für $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ die eindeutige $C^{1,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ Lösung des Anfangswertproblems (1) für die Transportgleichung.

Beweis. Nachrechnen. □

2.3 Wellengleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

<u>Homogene Wellengleichung:</u>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$$

<u>Inhomogene Wellengleichung:</u>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$$

Hinzu kommen Anfangsbedingungen bei $t = 0$ und Randbedingungen für $x \in \partial\Omega$.

2.3.1 Homogene Wellengleichung für $\mathbf{n = 1}$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Notwendige Bedingung an eine Lösung u

Die Gleichung (2) ist äquivalent zu

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)}_{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}} u = 0 \tag{3}$$

Ist u Lösung von (2), dann setze

$$v(x, t) := \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

Somit löst v die homogene Transportgleichung mit $b = 1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ v(x, 0) = h(x) - g'(x). \end{cases}$$

Mit Satz 2.4 folgt

$$v(x, t) = v(x - t, 0) = \underbrace{h(x - t) - g'(x - t)}_{=:a(x-t)}.$$

Betrachtet man die Definition von v, so erkennt man, dass u die inhomogene Transportgleichung mit $b = -1$ löst:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = v(x, t) = a(x - t), \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Mit Satz 2.5 folgt:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(x + t) + \int_0^t a\big(x - (\tau - t) - \tau\big)\, d\tau \qquad \text{substituiere } x + t - 2\tau = y \\ &= g(x + t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y)\, dy \\ &= \frac{1}{2}\big(g(x + t) + g(x - t)\big) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Formel (4) wird Formel von d'Alembert genannt.

Satz 2.6
Sei $g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R})$ und

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\big(g(x+t)+g(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Dann gelten:

i) $u \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$,

ii) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ *in* $\mathbb{R}\times[0,\infty)$,

iii) $u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}$,

iv) Die Lösung von (2) hat notwendigerweise die Form (4).

Beweis. iv) wurde gerade vor dem Beweis hergeleitet. Der Rest folgt durch Nachrechnen. □

2.3.2 Beispiel eines Anfangs-Randwertproblems für die homogene Wellengleichung

Sei $\Omega = (0,\infty)$. Betrachte

$$(5) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } (0,\infty)\times[0,\infty), \\ u = g, u_t = h & \text{für } x > 0, t = 0 \quad \text{(Anfangswerte)}, \\ u = 0 & \text{für } x = 0, t \geq 0 \quad \text{(Randwerte)}. \end{cases}$$

Lösungsidee: Zurückführung auf Satz 2.6. Setze dazu

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & x \geq 0, t \geq 0, \\ -u(-x,t) & x < 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Im Allgemeinen ist eine so definierte Funktion $\widetilde{u}$ zwar C^1 aber nicht C^2, denn dazu wäre $u_{xx}(0,t) = 0$ erforderlich. Das gilt tatsächlich, wenn wir wüssten dass u eine Lösung ist. Denn dann gilt $u_{xx}(0,t) = u_{tt}(0,t) = 0$ wegen der Randbedingung bei $x = 0$ (man differenziere die Randbedingung zwei mal nach t). Momentan ist also noch nicht klar, dass $\widetilde{u}$ eine C^2-Funktion ist. Wir kommen darauf am Ende des Abschnittes zurück.

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0, \\ -g(-x) & x < 0, \end{cases} \qquad \widetilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 0, \\ -h(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Falls u (5) löst, dann löst $\widetilde{u}$

$$(6) \qquad \begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \widetilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times[0,\infty) \\ \widetilde{u} = \widetilde{g}, \widetilde{u}_t = \widetilde{h} & \text{für } x \in \mathbb{R}, t = 0 \end{cases}$$

Welche Bedingungen an g und h müssen erfüllt sein, damit man (6) mit der Formel von d'Alembert (4) lösen kann? Falls gilt

$$(V) \qquad g \in C^2[0,\infty),\ h \in C^1[0,\infty) \text{ sowie } g(0) = h(0) = 0 \text{ und } g''(0) = 0,$$

dann ist $\widetilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$, $\widetilde{h} \in C^1(\mathbb{R})$. Der Beweis dieser Überlegung ist eine Übung. Mit Satz 2.6 folgt dann:

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\big(\widetilde{g}(x+t) + \widetilde{g}(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \widetilde{h}(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Damit gilt dann für $x \geq 0,\ t \geq 0:$

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\big(g(x+t) + g(x-t)\big) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy, & x \geq t \geq 0 \\ \dfrac{1}{2}\big(g(x+t) - g(t-x)\big) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{t-x}^{t+x} h(y)\,dy, & t \geq x \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

denn $\int_{x-t}^{0} \tilde{h}(y)\,dy = -\int_{x-t}^{0} h(-y)\,dy = \int_{t-x}^{0} h(y)\,dy$. Weiter gilt für die so definierte Funktion u

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\big(g(0+t) - g(t-0)\big) + \frac{1}{2}\int_{t-0}^{t+0} h(y)\,dy = 0,$$

d.h. u erfüllt die Randbedingung. Das Nachrechnen der weiteren Lösungseigenschaften: Übung. Beachte, dass die Voraussetzung (V) an g, h erfüllt sein muss für die obige Lösungsformel.

Bemerkung Falls u durch (7) gegeben ist, dann ist die in x ungerade fortgesetzte Funktion $\widetilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Dazu muss man nachrechnen:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \quad \text{(bereits nachgerechnet)}, \\ u_{xx}(0,t) &= 0 \quad \text{(Übung)}. \end{aligned}$$

2.3.3 Homogene WG für $n = 2,3$

Sei $n \geq 2$. Betrachtet werden Lösungen $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ des folgenden Anfangswertproblems für die homogene WG

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{8}$$

Ziel: Lösungsformel für u, die nur von g und h abhängt. Dabei wird mindestens $g, h \in C(\mathbb{R}^n)$ vorausgesetzt.

Bemerkung Solche expliziten Lösungsformeln existieren für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir behandeln hier nur $n = 2,3$.

Definition 2.7 (Sphärische Mittelwerte)
Seien u, g, h wie in Problem (8). Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und definiere für $r > 0, t \geq 0$ die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} U(x,r,t) &:= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint\limits_{\partial B_r(x)} u(y,t)d\sigma_y \\ G(x,r) &:= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint\limits_{\partial B_r(x)} g(y)d\sigma_y \\ H(x,r) &:= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint\limits_{\partial B_r(x)} h(y)d\sigma_y. \end{aligned}$$

Fasse für festes $x \in \mathbb{R}^n$ den sphärischen Mittelwert U als Funktion von (r,t) bzw. G und H als Funktionen von r auf:

$$U(x,\cdot,\cdot) : (0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad G(x,\cdot),\ H(x,\cdot) : (0,\infty) \to \mathbb{R}.$$

Da $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist folgt

$$\lim_{r\to 0} U(x,r,t) = u(x,t),$$

d.h. $U(x,\cdot,\cdot)$ besitzt eine stetige Fortsetzung auf $[0,\infty) \times [0,\infty)$. Analog gilt: $G(x,\cdot),\ H(x,\cdot)$ sind stetig fortsetzbar auf $[0,\infty)$.

Satz 2.8 (Euler-Poisson-Darboux-Gleichung)
Sei $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ Lösung von (8) und $x \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann ist $U(x,\cdot,\cdot) \in C^{2,2}([0,\infty) \times [0,\infty))$ und löst die Gleichung

$$(9) \qquad \begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \dfrac{n-1}{r} U_r = 0, & (r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty), \\ \qquad U(x,r,0) = G(x,r), & r \geq 0, \\ \qquad U_t(x,r,0) = H(x,r), & r \geq 0. \end{cases}$$

Beweis. Substituiere zunächst $y := x + rz$, dann gilt $d\sigma_y = r^{n-1} d\sigma_z$ und

$$\begin{aligned} U(x,t,r) &= \frac{1}{\omega_n\, r^{n-1}} \oint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, d\sigma_y \\ &= \frac{1}{\omega_n} \oint_{\partial B_1(0)} u(x+rz,t)\, d\sigma_z. \end{aligned}$$

Mit dem Handout A.3 gilt:

$$U(x,t,r) \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{\omega_n\, r^{n-1}} \oint_{\partial B_r(x)} \underbrace{u(y,0)}_{=g(y)}\, d\sigma_y = G(x,r)$$

$$U_t(x,t,r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint_{\partial B_r(x)} u_t(y,t)\, d\sigma_y \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint_{\partial B_r(x)} h(y)\, d\sigma_y = H(x,r)$$

$$U_{tt}(x,r,t) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint_{\partial B_r(x)} u_{tt}(y,t)\, d\sigma_y$$

$$\begin{aligned} U_r(x,t,r) &= \frac{1}{\omega_n} \oint_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+rz,t) \cdot z\, d\sigma_z \\ &\overset{\text{GIS 2}}{=} \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(0)} \operatorname{div}_z\big(\nabla u(x+rz,t)\big) dz = \frac{r}{\omega_n} \int_{B_1(0)} (\Delta u)(x+rz,t)\, dz \\ &\underset{r^n dz = dy}{\overset{y=x+rz}{=}} \frac{r}{\omega_n\, r^n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y,t)\, dy \xrightarrow{r\to 0} 0. \text{ Ausserdem gilt:} \frac{U_r(x,t,r)}{r} \xrightarrow{r\to 0} \frac{1}{n} \Delta u(x,t). \end{aligned}$$

$$(*) \qquad = \frac{r}{n} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta u(y,t) dy$$

$$\overset{\text{Cavalieri}}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r \oint_{\partial B_s(x)} \Delta u(y,t)\, d\sigma_y\, ds$$

Ableiten der letzten Gleichung nach r liefert:

$$(**) \qquad U_{rr}(x,t,r) = \frac{1-n}{n|B_r(x)|} \int\limits_{B_r(x)} \Delta u(y,t)\, dy + \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint_{\partial B_r(x)} \Delta u(y,t)\, d\sigma_y$$

$$\lim_{r\to 0} U_{rr}(x,t,r) = \left(\frac{1-n}{n} + 1\right) \Delta u(x,t) = \frac{1}{n}\Delta u(x,t),$$

d.h. $U_{rr}(x,\cdot,\cdot)$ ist stetig fortsetzbar in $r=0$. Insgesamt folgt $U(x,\cdot,\cdot) \in C^{2,2}([0,\infty)\times[0,\infty))$ und mit $(*)$ und $(**)$ folgt

$$U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint_{\partial B_r(x)} \overbrace{\Delta u(y,t)}^{=u_{tt}}\, d\sigma_y = U_{tt} \text{ für } r>0, t\geq 0$$

und somit auch im Limes $r \to 0$. □

Korollar 2.9
Sei $u \in C^{2,2}\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$ Lösung von (8) und

$$\widetilde{U}(x,r,t) := rU(x,r,t), \widetilde{H}(x,r) := rH(x,r) \text{ und } \widetilde{G}(x,r) := rG(x,r) \text{ für } x\in\mathbb{R}^3, r,t\geq 0.$$

Dann ist $\widetilde{U}(x,\cdot,\cdot) \in C^{2,2,}([0,\infty)\times[0,\infty))$ Lösung von

$$(10) \qquad \begin{cases} \widetilde{U}_{tt} - \widetilde{U}_{rr} = 0 & \text{auf } [0,\infty)\times[0,\infty) \\ \widetilde{U}(x,r,0) = \widetilde{G}(x,r), & r\geq 0, \\ \widetilde{U}_t(x,r,0) = \widetilde{H}(x,r), & r \geq 0, \\ \widetilde{U}(x,0,t) = 0, & t\geq 0. \end{cases}$$

Beweis. Wir rechnen die DGL nach:

$$\widetilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r) = \frac{\partial}{\partial r}(rU_r + U) = \widetilde{U}_{rr}$$

Die Rand- und Anfangsbedingungen sind klar. □

Satz 2.10 (Lösung von (8) für $n=3$)
Sei $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und

$$(11) \qquad u(x,t) := \frac{1}{4\pi t^2} \oint\limits_{\partial B_t(x)} t\,h(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\, d\sigma_y, \qquad x\in\mathbb{R}^3, t\geq 0.$$

(Kirchhoff-Formel)

Dann gilt:

i) $u \in C^{2,2,}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$,

ii) u *löst* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ *auf* $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$,

iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = h(x_0)$ *für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^3$,

iv) Jede Lösung von (8) hat die Form (11).

Beweis. iv): Wir leiten zunächst (11) her. Sei dazu u Lösung von (8) und $\widetilde{U}, \widetilde{G}, \widetilde{H}$ wie im Korollar 2.9, Offenbar gilt dann $\widetilde{G}(x,0) = \widetilde{H}(x,0) = 0$ sowie

$$\widetilde{G}_{rr}(x,r) = \big(r\,G(x,r)\big)_{rr} = \big(G(x,r) + r\,G_r(x,r)\big)_r = 2G_r(x,r) + r\,G_{rr}(x,r).$$

Wie im Beweis von Satz 2.8 gilt auch:

$$\lim_{r\to 0} G_r(x,r) = 0$$
$$\lim_{r\to 0} G_{rr}(x,r) = \frac{1}{n}\Delta g(x).$$

Folglich gilt $\widetilde{G}_{rr}(x,0) = 0$.

Damit ist die Voraussetzung (V) aus dem Abschnitt 2.3.2 erfüllt und das Ergebnis (7) anwendbar, d.h. man erhält (beachte x ist ein Parameter; r, t hier entsprechen den Variablen x, t in Abschnitt 2.3.2):

$$\widetilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\Big(\widetilde{G}(x,t+r) - \widetilde{G}(x,t-r)\Big) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \widetilde{H}(x,y)\,dy \qquad\qquad 0 \le r \le t.$$

Daraus lässt sich u gewinnen:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \lim_{r\to 0} U(x,r,t) = \lim_{r\to 0} \widetilde{U}(x,r,t)\,\frac{1}{r} \\
&= \lim_{r\to 0}\left(\frac{\widetilde{G}(x,t+r) - \widetilde{G}(x,t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \widetilde{H}(x,y)\,dy\right) \\
&= \widetilde{G}'(x,t) + \widetilde{H}(x,t) \\
&= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{4\,\pi\,t^2}\oint_{\partial B_t(x)} g(y)\,d\sigma_y\right)}_{=:u_2(x,t)} + \underbrace{\frac{t}{4\,\pi t^2}\oint_{\partial B_t(x)} h(y)\,d\sigma_y}_{=:u_1(x,t)}
\end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) \quad &\overset{y:=x+tz}{=} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{4\,\pi}\oint_{\partial B_1(0)} g(x+tz)\,d\sigma_z\right) = \frac{1}{4\,\pi}\oint_{\partial B_1(0)} g(x+tz) + t\,(\nabla g)(x+tz)\cdot z\,d\sigma_z \\
&= \frac{1}{4\,\pi\,t^2}\oint_{\partial B_t(x)} g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)d\sigma_y.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\oint_{\partial B_t(x)} t\,h(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\,d\sigma_y.$$

Nun folgt der Beweis von i), ii) und iii):

$$u_1(x,t) = \frac{1}{4\,\pi\,t^2}\oint_{\partial B_t(x)} t\,h(y)\,d\sigma_y$$
$$u_2(x,t) = \frac{1}{4\,\pi\,t^2}\oint_{\partial B_t(x)} g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\,d\sigma_y$$

Offenbar gilt $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$.

$$\lim_{t\to 0} u_1(x,t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} \frac{1}{4\,\pi\,t^2} \oint\limits_{\partial B_t(x)} |\nabla g(y)| \cdot |\overbrace{(y-x)}^{=t}|\, d\sigma_y = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} u(x,t) = g(x).$$

Damit ist der erste Teil von iii) bewiesen. Außerdem gilt $u_1(x,t) = t\,H(x,t)$ (beachte: die sphärischen Mittelwerte werden hier mit t als Radius gebildet). Wir zeigen, dass u_1 die WG löst:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) &= t\,\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) + H(x,t),\\
\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(x,t) &= 2\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) + t\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x,t)\\
\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) &\overset{(*)}{=} \frac{t}{3|B_t(x)|} \int\limits_{B_t(x)} \Delta h(y)\, dy\\
\frac{\partial H^2}{\partial t^2}(x,t) &\overset{(**)}{=} \frac{1-3}{3\,|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \Delta h(y)\, dy + \frac{1}{4\,\pi\,t^2} \oint\limits_{\partial B_t(x)} \Delta h(y)\, d\sigma_y
\end{aligned}$$

Für $(*), (**)$: vergleiche hierzu Beweis von Satz 2.8. Demzufolge ist:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{4\,\pi\,t} \oint\limits_{\partial B_t(x)} \Delta h(y)\, d\sigma_y.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta_x u_1(x,t) &= \Delta_x \frac{1}{4\,\pi\,t} \oint\limits_{\partial B_t(x)} h(y)\, dy\\
&= \Delta_x \frac{t}{4\,\pi} \oint\limits_{\partial B_1(0)} h(x+tz)\, d\sigma_z\\
&= \frac{t}{4\,\pi} \oint\limits_{\partial B_1(0)} \underbrace{\Delta_x h(x+tz)}_{=(\Delta h)(x+tz)}\, d\sigma_z\\
&= \frac{1}{4\,\pi\,t} \oint\limits_{\partial B_t(x)} \Delta h(y)\, d\sigma_y
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ u_1 löst die homogene WG auf $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$. Analog zeigt man: auch u_2 löst die homogene WG auf $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$.

Noch zu zeigen: zweiter Teil von iii). Es gilt:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) = \lim_{t\to 0} t\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) + H(x,t) = h(x)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) \overset{\text{vgl. Satz 2.8 } (*)}{=} t\, \underbrace{\frac{1}{3|B_t(x)|} \int\limits_{B_t(x)} \Delta_y\big(g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\big)\, dy}_{\text{Volumenmittelwert}} \quad \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

$\square$

Wir kommen nun zur Lösung von (8) für $n = 2$

Problem: Lösung der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung (9) ist für $n = 2$ nicht explizit bekannt.

Trick: Künstliche Erweiterung auf ein dreidimensionales Problem:

Setze $\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$. Es gilt dann:

u löst die homogene WG in $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \Leftrightarrow \bar{u}$ löst die homogene WG in $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$.

Definiere entsprechend:

$$\bar{g}(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2)$$
$$\bar{h}(x_1, x_2, x_3) := h(x_1, x_2)$$

Dann gilt für $\bar{u}$:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \Delta_{(x_1,x_2,x_3)} \bar{u} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty),$$
$$\bar{u} = \bar{g}, \; \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{h} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \{0\}.$$

Mit Satz 2.10:

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{4\,\pi\,t^2} \oint\limits_{\partial B_t(x)} t\bar{h}(y) + \bar{g}(y) + \nabla \bar{g}(y) \cdot (y - x)\; d\sigma_y.$$

Beachte: Diese Darstellung bezieht sich auf $n = 3$, d.h. es wird über die 3-dimensionale Sphäre integriert und ebenso das 3-dimensionale Skalarprodukt gebildet. Wir leiten daraus nun eine griffigere Formel für $u(x_1, x_2, t)$ her.

Notation:

$$x := (x_1, x_2, x_3), \quad x' := (x_1, x_2), \quad \bar{x} := (x_1, x_2, 0).$$

Damit gilt

$$u(x', t) = \bar{u}(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\,\pi\,t^2} \oint\limits_{\partial B_t(\bar{x})} t\bar{h}(y) + \bar{g}(y) + \nabla \bar{g}(y) \cdot (y - \bar{x})\; d\sigma_y. \tag{12}$$

$B_t(\bar{x}) = B_t^3(\bar{x})$ ist 3-dimensionale Kugel um $\bar{x}$. Parametrisiere die obere Halbsphäre:

$$\psi(y') := (y', \sqrt{t^2 - |y' - x'|^2}), \text{ für } y' \in B_t^2(x') = \text{2-dimensionale Kreisscheibe um } x',$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y') = \left(1, 0, \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{t^2 - |y' - x'|^2}}\right),$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y_2}(y') = \left(0, 1, \frac{x_2 - y_2}{\sqrt{t^2 - |y' - x'|^2}}\right),$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y') \times \frac{\partial \psi}{\partial y_2}(y') = \left(\frac{y_1 - x_1}{\sqrt{t^2 - |y' - x'|^2}}, \frac{y_2 - x_2}{\sqrt{t^2 - |y' - x'|^2}}, 1\right),$$
$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y') \times \frac{\partial \psi}{\partial y_2}(y')\right| = \sqrt{\frac{|x' - y'|^2}{t^2 - |y' - x'|^2} + 1} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y' - x'|^2}}.$$

Die Lösungsformel für $n = 2$ lautet damit:

$$u(x', t) = \frac{2}{4\,\pi\,t} \int\limits_{B_t^2(x')} \frac{t\,h(y') + g(y') + \nabla g(y') \cdot (y' - x')}{\sqrt{t^2 - |y' - x'|^2}} dy' \qquad \text{für } x' \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \tag{13}$$

wobei $\nabla \bar{g}(y) = \begin{pmatrix} \nabla g(y') \\ 0 \end{pmatrix}$ verwendet wurde und der Faktor 2 entsteht, da man sowohl über die untere als auch die obere Halbsphäre integriert.

Satz 2.11 (Lösung von (8) für $n = 2$)
Sei $g \in C^3(\mathbb{R}^2), h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

$$(14) \qquad u(x', t) = \frac{1}{2\,\pi t} \int\limits_{B_t(x')} \frac{t\, h(y') + g(y') + \nabla g(y') \cdot (y' - x')}{\sqrt{t^2 - |y' - x'|^2}}\, dy' \quad \textit{für } x' \in \mathbb{R}^2,\, t > 0.$$

(Poisson-Formel)

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) $u \in C^{2;2}(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$,

(b) *u löst* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{(x_1, x_2)} u = 0$ *auf* $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$,

(c) $\lim\limits_{\substack{(x',t) \to (x'_0, 0) \\ t>0}} u(x', t) = g(x'_0), \qquad \lim\limits_{\substack{(x',t) \to (x'_0, 0) \\ t>0}} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x', t) = h(x'_0) \quad$ *für alle $x'_0 \in \mathbb{R}^2$.*

(d) *Jede Lösung von (8) hat für $n = 2$ die Form (14).*

Beweis. Mit Satz 2.10 und Formel (13). □

2.4 Abhängigkeitsgebiete

Betrachte Lösungen der homogenen WG für $n = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u = g,\ \frac{\partial u}{\partial t} = h \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 > 0$ fest. Auf welcher Menge muß man die Anfangswerte $g(x), h(x)$ kennen, um die Lösung u im Punkt (x_0, t_0) bestimmen zu können? Natürlich wäre der ganze $\mathbb{R}^n$ so eine Menge – aber wie wir gleich sehen werden genügen deutlich kleinere Mengen. Man nennt die kleinste Menge, auf der man $g(x)$ und $h(x)$ kennen muss um $u(x_0, t_0)$ zu bestimmen, das **Abhängigkeitsgebiet** $M(x_0, t_0)$ des Punktes (x_0, t_0) .

Um die Abhängigkeitsgebiete genau angeben zu können, fassen wir nochmals die drei bekannten Lösungsformeln zusammen:

$n = 1:$ d'Alembert-Formel:

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\big(g(x_0 + t_0) + g(x_0 - t_0)\big) + \frac{1}{2} \int\limits_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} h(y)\, dy.$$

$n = 2$: Poisson-Formel:

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2\,\pi t_0} \int\limits_{B_{t_0}(x_0)} \frac{g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x_0) + t_0\, h(y)}{\sqrt{t_0^2 - |y - x_0|^2}} dy.$$

$n = 3$: Kirchhoff-Formel:

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{4\,\pi\, t_0^2} \oint\limits_{\partial B_{t_0}(x_0)} g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + t_0\, h(y)\, d\sigma_y.$$

Abhängigkeitsgebiete für $n = 1, 2, 3$:

n	$M(x_0, t_0)$
1	$[x_0 - t_0, x_0 + t_0] = \overline{B_{t_0}(x_0)}$
2	$\overline{B_{t_0}(x_0)}$
3	$\partial B_{t_0}(x_0)$

Bemerkung Im Gegensatz zu den Fällen $n = 1$ und $n = 2$ ist das Besondere am dreidimensionalen Fall die Tatsache, dass das Abhängigkeitsgebiet nur eine Sphäre und keine Vollkugel ist.

Einfluss der „Wellengeschwindigkeit“

Betrachte die homogene WG mit Parameter c:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u &= 0 \quad && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g,\ \frac{\partial u}{\partial t} &= h && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Setze $v(x, t) := u(x, \frac{1}{c} t)$. Dann erfüllt v

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v &= 0 \quad && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v = g,\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{c} h && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Für $n = 3$ bedeutet dies:

$$u(x_0, t_0) = v(x_0, ct_0) = \frac{1}{4\, c^2 \pi\, t_0^2} \oint\limits_{\partial B_{ct_0}(x_0)} g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x_0) + ct_0\, h(y)\, d\sigma_y.$$

Das Abhängigkeitsgebiet ist nun ∂B_{ct_0}, d.h. ein Signal zur Zeit $t = 0$ im Punkt y_0 wird im Punkt x_0 genau zur Zeit $t_0 = \frac{|y_0 - x_0|}{c}$ wahrgenommen. Deshalb bezeichnet man c als „Wellengeschwindigkeit“. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist die Interpretation von c entsprechend.

2.5 Die inhomogene WG

Wir betrachten nun die folgende inhomogene WG:

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u = g,\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = h & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

Idee: Aufgrund der Linearität des Problems lässt sich (15) in zwei Teilprobleme zerlegen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\ u = g,\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = h & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \tag{15a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\ u = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{15b}$$

Für (15a) ist die Lösung für $n = 1, 2, 3$ bekannt aus den bisherigen Untersuchungen. Ziel ist es nun, eine Lösung für (15b) zu bestimmen.

Mann kann hier eine Analogie zu den gewöhnlichen DGLen finden:

Sei dazu A eine $n \times n$-Matrix, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ und $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ Lösung von

$$\ddot{u} - Au = f$$
$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0$$

Um die Lösung u darstellen zu können, transformieren wir auf ein System 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{u} = v, & u(0) = 0, \\ \dot{v} = Au + f, & v(0) = 0, \end{cases}$$

bzw.

$$\dot{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} = B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ A & 0 \end{pmatrix}$ der Dimension $2n \times 2n$. Die Lösung des homogenen Problems ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} = e^{tB} c, \qquad c \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Um die inhomogene Gleichung zu lösen, bedienen wir uns der Methode der Variation der Konstanten, d.h. wir machen den Ansatz

$$\begin{pmatrix} u_p(t) \\ v_p(t) \end{pmatrix} = e^{tB} c(t), \qquad c : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{2n}$$

und erhalten

$$c(t) = \int_0^t e^{-\tau B} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Somit hat die Lösung der inhomogenen Gleichung die Gestalt

$$\begin{pmatrix} u_p(t) \\ v_p(t) \end{pmatrix} = \int_0^t e^{(t-\tau)B} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau =: \int_0^t \begin{pmatrix} \widetilde{u}(t-\tau,\tau) \\ \widetilde{v}(t-\tau,\tau) \end{pmatrix} d\tau, \qquad \begin{pmatrix} u_p(0) \\ v_p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ wie folgt definiert sind

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}(s,\tau) \\ \widetilde{v}(s,\tau) \end{pmatrix} = e^{sB} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix}$$

Klar ist, dass $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ als Funktion von s der folgenden Gleichung genügen:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\widetilde{v}\\ A\widetilde{u}\end{pmatrix}, \qquad \widetilde{u}(0,\tau) = 0, \quad \widetilde{v}(0,\tau) = f(\tau).$$

Und dies bedeutet, dass $\widetilde{u}(s,\tau)$ die folgende DGL zweiter Ordnung löst:

$$\begin{aligned}\ddot{\widetilde{u}} - A\widetilde{u} &= 0\\ \widetilde{u}(0,\tau) &= 0\\ \dot{\widetilde{u}}(0,\tau) &= f(\tau).\end{aligned}$$

Diese Analogie trägt auch für die WG – wie wir als nächstes zeigen.

Definition 2.12
Sei $f \in C^{k,0}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ mit $k = 1$ für $n = 1$ bzw. $k = 2$ für $n = 2,3$. Für $\tau \geq 0$ sei $\widetilde{u}(x,t;\tau)$ die Lösung von

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2} - \Delta \widetilde{u} = 0 & \mathbb{R}^n \times [0,\infty),\\ \widetilde{u}(x,0;\tau) = 0, \ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x,0;\tau) = f(x,\tau) & \forall x \in \mathbb{R}^n,\end{cases}$$

gegeben durch die Formel (4) in Satz 2.6 für $n = 1$, durch die Formel (14) in Satz 2.11 für $n = 2$ und durch die Formel (11) in Satz 2.10 für $n = 3$.

Satz 2.13
Für f gelten die Voraussetzungen von Definition 2.12. Dann ist

$$u(x,t) = \int_0^t \widetilde{u}(x,t-\tau;\tau)\,d\tau, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

die Lösung von Problem (15b).

Beweis. Für $\tau \geq 0$ ist $\widetilde{u}(\cdot,\cdot;\tau) \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$[1]. Außerdem sind $\widetilde{u}$ und die entsprechenden partiellen Ableitungen stetig in τ (betrachte dazu Lösungsformel).

Wir prüfen zunächst die Anfangsbedingungen:

i) $u(x,0) = 0$

ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \underbrace{\widetilde{u}(x,0;t)}_{=0\ \forall t\geq 0} + \displaystyle\int_0^t \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x,t-\tau;\tau)\,d\tau \xrightarrow{t\to 0} 0$

Um nachzuweisen, dass u die inhomogene WG erfüllt, betrachten wir die zweiten partiellen Ableitungen nach t bzw. x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \underbrace{\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x,0;t)}_{=f(x,t)} + \int_0^t \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}(x,t-\tau;\tau)\,d\tau$$

$$\Delta u(x,t) = \int_0^t \underbrace{\Delta \widetilde{u}(x,t-\tau;\tau)}_{=\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}(x,t-\tau;\tau)}\,d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t),$$

[1] Streng genommen haben wir nur bewiesen, dass $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ ist und u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ ist, d.h. $u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Die Aussage $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ ist wahr und kann mit denselben Überlegungen bewiesen werden, die in den Sätzen 2.6, 2.11, 2.10 zum Einsatz kamen. Insbesondere der Fall $n = 1$ ist schnell einzusehen.

d.h. u erfüllt die inhomogene WG. Zusammen mit i) und ii) folgt, dass u das Problem (15b) löst. □

Konkrete Bestimmung der Lösung von (15b) für die Raumdimensionen $n = 1, 2, 3$

$n = 1:$

$$\widetilde{u}(x,t;\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} f(y,\tau)\,dy,$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y,\tau)\,dy\,d\tau \overset{\tau=t-s}{=} \frac{1}{2}\int_0^t \int\limits_{x-s}^{x+s} f(y,t-s)\,dy\,ds$$

$n = 2:$

$$\widetilde{u}(x,t;\tau) = \frac{1}{2\pi t}\int\limits_{B_t(x)} \frac{t f(y,\tau)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_t(x)} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy,$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int\limits_{B_{t-\tau}(x)} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-|y-x|^2}}\,dy\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int\limits_{B_s(x)} \frac{f(y,t-s)}{\sqrt{s^2-|y-x|^2}}\,dy\,ds$$

$n = 3:$

$$\widetilde{u}(x,t;\tau) = \frac{1}{4\pi t^2}\oint\limits_{\partial B_t(x)} t\,f(y,\tau)\,d\sigma_y = \frac{1}{4\pi t}\oint\limits_{\partial B_t(x)} f(y,\tau)\,d\sigma_y,$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \frac{1}{t-\tau}\oint\limits_{\partial B_{t-\tau}(x)} f(y,\tau)\,d\sigma_y\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \oint\limits_{\partial B_s(x)} \frac{f(y,t-s)}{s}\,d\sigma_y\,ds$$

2.6 Eindeutigkeit für Anfangs-Randwert-Probleme (ARP) bei der Wellengleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Betrachte das ARP

$$(16) \qquad \begin{cases} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T], \\ \text{(AW)} & u = g,\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = h, \quad x \in \Omega,\ t = 0, \\ \text{(RW)} & u(x,t) = k(x,t), \quad x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T]. \end{cases}$$

Satz 2.14
Problem (16) besitzt höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$.

Beweis. Der Beweis verläuf mit Hilfe der sogenannten Energiemethode. Sind u_1, u_2 Lösungen von (16), so erfüllt $v := u_1 - u_2$

$$(17) \qquad \begin{cases} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T], \\ \text{(AW)} & v = 0,\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega,\ t = 0, \\ \text{(RW)} & v = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T]. \end{cases}$$

Definiere Energie für $t \in [0,T]$:

$$e(t) := \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \right)^2 + |\nabla v(x,t)|^2 \, dx.$$

Ableiten liefert dann

$$\begin{aligned} e'(t) &= \frac{1}{2} \int\limits_\Omega 2 \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) + 2 \nabla v(x,t) \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) \, dx \\ &\overset{\text{GIS 2}}{=} \int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)}_{=\Delta v(x,t)} - \Delta v(x,t) \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) \, dx + \oint\limits_{\partial\Omega} \nabla v(x,t) \cdot \nu_x \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} v(x,t)}_{=0} \, d\sigma_x, \end{aligned}$$

denn aus $v(x,t) = 0$ für alle $t \in [0,T], x \in \partial\Omega$ folgt $\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = 0$ für alle $t \in [0,T], x \in \partial\Omega$. Insgesamt folgt also $e'(t) = 0$ für alle $t \in [0,T]$ und es gilt $e(t) = e(0) = 0$ für alle $t \in [0,T]$. D.h. $\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = 0, \nabla v(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$. Mit den Anfangs- und Randbedingungen folgt $v \equiv 0$ für $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$. $\square$

KAPITEL 3

Laplace- und Poissongleichung

3.1 Harmonische Funktionen

Definition 3.1
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt harmonisch in Ω, falls gilt:

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Beispiele

$$\begin{aligned}
\Omega = \mathbb{R}: \quad & u(x) = ax + b, && a, b \in \mathbb{R} \\
\Omega = \mathbb{R}^2: \quad & u(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \\
& u(x_1, x_2) = e^{x_1} \cos x_2 \\
\Omega = \mathbb{R}^3: \quad & u(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\
& u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_3
\end{aligned}$$

Bemerkung Im Fall $n = 2$: $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Falls $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, mit $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$, holomorph auf Ω ist, dann gelten die Cauchy-Riemannschen DGln:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Daraus folgt, dass u und v in Ω harmonisch sind, denn

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Analog zeigt man $\Delta v = 0$.

Weitere Beispiele harmonischer Funktionen für $n = 2$ sind:

$f(z)$	$u = \operatorname{Re} f$	$v = \operatorname{Im} f$
z	x	y
z^2	$x^2 - y^2$	$2xy$
z^3	$x^3 - 3xy^2$	$3x^2y - y^3$
e^z	$e^x \cos(y)$	$e^x \sin(y)$
$\ln(z)$	$\ln\lvert z\rvert = \ln\sqrt{x^2+y^2}$	$\arg z = \arctan\frac{y}{x}$ falls z.B. $x, y > 0$

Frage: Ist jede in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ harmonische Funktion Real- bzw. Imaginärteil einer holomorphen Funktion?

Satz 3.2
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend (z. B. sternförmig). Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, dann ex. eine harmonische Funktion v in Ω, sodass

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad z = x + iy \in \Omega$$

holomorph ist.

Beweis. Das Vektorfeld $\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$ besitzt auf Ω eine Stammfunktion, denn $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x}$ (u ist harmonisch). Nach dem Integrabilitätskriterium für Vektorfelder (Ana 2, Satz 7.17) folgt: $\exists v : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\nabla v = \binom{g}{h}$, d.h. für v gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Damit sind die Cauchy-Riemannschen Dgl. erfüllt und $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ist holomorph. □

Proposition 3.3
Sei $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und

$$u = \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \varphi(|x|) \end{cases}, \text{ wobei } r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und $\Delta u(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r)$.

Beweis. $x \mapsto |x|$ ist $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Mit der Kettenregel folgt $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial |x|}{\partial x_i} &= \frac{\partial\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2|x|} = x_i \frac{1}{|x|} \\
\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_i x_j} &= \frac{\delta_{ij}}{|x|} + x_i\left(-\frac{1}{|x|^2}\right)\frac{x_j}{|x|} = \frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \\
\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \varphi'(|x|)\frac{x_i}{|x|} = \varphi'(r)\frac{x_i}{r} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= \varphi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \varphi'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\
\Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \varphi''(r)\cdot 1 + \frac{\varphi'(r)}{r}(n-1)
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.4
Seien u, φ wie in Proposition 3.3 und $n \geq 2$. Dann gilt:

$$u \text{ ist harmonisch in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(r) = a + b \log r, & n = 2 \\ \varphi(r) = a + b r^{2-n}, & n > 2 \end{cases}$$

Beweis. u harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \overset{\text{Prop. 3.3}}{\Leftrightarrow} \varphi'' + \frac{n-1}{r}\varphi' = 0$ auf $(0, \infty)$
$\Leftrightarrow r^{1-n}(r^{n-1}\varphi')' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^{n-1}\varphi' = \text{const.} = C \quad \Leftrightarrow \varphi'(r) = \frac{C}{r^{n-1}}$. □

Übung: Formuliere und beweise Korollar 3.4 für den Fall $n = 1$.

Bemerkung $u(x)$ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad u(x-p)$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$.

3.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

Lemma 3.5
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sei harmonisch in Ω. Dann gilt:

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = 0. \qquad \text{Dabei ist } \frac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu \text{ auf } \partial\Omega$$

und $\nu(y)$ bezeichnet den äußeren Normalenvektor im Punkt $y \in \partial\Omega$.

Beweis. Benutze Green'sche Identität für u wie in Lemma 3.5 und $v \equiv 1$

$$\int_\Omega (u \underbrace{\Delta v}_{0} - \underbrace{v \Delta u}_{\Delta u = 0})\, dx = \oint_{\partial\Omega} (u \underbrace{\nabla v}_{=0} - \underbrace{v \nabla u}_{=\nabla u}) \cdot \nu \, d\sigma.$$

Es folgt

$$0 = \oint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \, d\sigma.$$

□

Definition 3.6 (Gaußsche Mittelwerte)
Sei $u : \overline{B_R(x_0)} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$m_R(x_0, u) := \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \oint_{\partial B_R(x_0)} u(x)\, d\sigma$$

Oberflächenmittelwert von u in x_0 und

$$M_R(x_0, u) := \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u(x)\, dx$$

Volumenmittelwert von u in x_0. Dabei ist $\omega_n := \oint_{\partial B_1(0)} 1\, d\sigma$ das n-dim Oberflächenmaß der Einheitssphäre.

Für eine genauere Beschreibung von ω_n vgl. ANA III Skript Reichel, Seiten 30, 31, 62. Für das Oberflächenmaß von $\partial B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\oint_{\partial B_r(0)} 1 \, d\sigma = \omega_n r^{n-1}.$$

Für das Volumen der n-dim Einheitskugel folgt dann

$$\int_{B_1(0)} 1 \, dx = \int_0^1 \Big(\underbrace{\oint_{\partial B_r(0)} 1 \, d\sigma}_{\omega_n r^{n-1}} \Big) dr = \int_0^1 \omega_n r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n};$$

für das Volumen von $B_R(0)$ folgt weiter:

$$\int_{B_R(0)} 1 \, dx = \int_0^R \Big(\underbrace{\oint_{\partial B_r(0)} 1 \, d\sigma}_{\omega_n r^{n-1}} \Big) dr = \int_0^R \omega_n r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n} R^n.$$

Lemma 3.7
Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle $x_0 \in \Omega$:

$$\lim_{R\to 0} m_R(x_0, u) = \lim_{R\to 0} M_R(x_0, u) = u(x_0).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $\delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta, x \in \Omega \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$.

$$m_R(x_0, u) - u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \oint_{\partial B_R(x_0)} \big(u(x) - u(x_0)\big) \, d\sigma$$

Für $0 < R < \delta$ gilt dann

$$|m_R(x_0, u) - u(x_0)| \leq \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \oint_{\partial B_R(0)} \varepsilon \, d\sigma = \varepsilon$$

Analog geht der Beweis für den Volumenmittelwert. □

Satz 3.8 (Gaußscher Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)
Die Funktion $u : \overline{B_R(x_0)} \to \mathbb{R}$ sei stetig und harmonisch in $B_R(x_0)$. Dann gilt:

$$u(x_0) \overset{a)}{=} m_R(x_0, u) \overset{b)}{=} M_R(x_0, u).$$

Beweis. a) Sei $0 < \rho < R$. Definiere für $x \neq x_0$

$$v(x) := \begin{cases} |x - x_0|^{2-n}, & n > 2 \\ \log |x - x_0|, & n = 2 \end{cases}$$

Nach Korollar 3.4 und anschließender Bemerkung ist v harmonisch.

Sei $\Omega = B_\rho(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$, $0 < \varepsilon < \rho$. Benutze die Greensche Identität (Lemma 3 im Appendix A1)

$$(*) \qquad \int_\Omega u \underbrace{\Delta v}_{=0} - v \underbrace{\Delta u}_{=0} \, dx = \oint_{\partial\Omega} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \nu \, d\sigma \quad = 0.$$

Dabei ist:

$$\partial\Omega = \partial B_\varepsilon(x_0) \cup \partial B_\rho(x_0).$$

Zunächst berechnen wir:

$$\nabla v(x) = \begin{cases} (2-n)\frac{x-x_0}{|x-x_0|^n}, & n > 2 \\ \frac{x-x_0}{|x-x_0|^2}, & n = 2 \end{cases}$$

Auf $\partial B_\rho(x_0)$ gilt:

$$\nu(x) = \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$$
$$v(x) = \begin{cases} \rho^{2-n}, & n > 2 \\ \log(\rho), & n = 2 \end{cases}$$
$$\nabla v(x) \cdot \nu(x) = \begin{cases} (2-n)\rho^{1-n}, & n > 2 \\ \frac{1}{\rho}, & n = 2 \end{cases}$$

Auf $\partial B_\varepsilon(x_0)$ gilt:

$$\nu(x) = \frac{x_0-x}{|x-x_0|}$$
$$v(x) = \begin{cases} \varepsilon^{2-n}, & n > 2 \\ \log(\varepsilon), & n = 2 \end{cases}$$
$$\nabla v(x) \cdot \nu(x) = \begin{cases} (n-2)\varepsilon^{1-n}, & n > 2 \\ -\frac{1}{\varepsilon}, & n = 2 \end{cases}$$

Wegen Lemma 3.5 gilt:

$$\oint_{\partial B_r(x_0)} \nabla u \cdot \nu \, d\sigma = 0 \qquad \text{für } 0 < r < R,$$

und insbesondere für $r = \rho$ und $r = \varepsilon$. Aus der Greenschen Identität $(*)$ erhalten wir somit

$$0 = \oint_{\partial B_\rho(x_0)} u \nabla v \cdot \nu \, d\sigma + \oint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \nabla v \cdot \nu \, d\sigma$$

Für $n \geq 3$ bedeutet dies

$$0 = \oint_{\partial B_\rho(x_0)} u \frac{2-n}{\rho^{n-1}} \, d\sigma - \oint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \frac{2-n}{\varepsilon^{n-1}} \, d\sigma,$$

d.h.

$$\begin{array}{ccc} m_\rho(x_0, u) & = & m_\varepsilon(x_0, u) \\ \downarrow{\scriptstyle (\rho\to R)} & & \downarrow{\scriptstyle (\varepsilon\to 0)} \\ m_R(x_0, u) & = & u(x_0) \end{array}$$

Für $n = 2$ ist eine kleine Modifikation erforderlich.

b)

$$\int_{B_R(x_0)} u \, d\sigma = \int_0^R \left(\oint_{\partial B_\rho(x_0)} u \, d\sigma \right) d\rho \overset{a)}{=} \int_0^R u(x_0) \cdot \rho^{n-1} \omega_n \, d\rho = u(x_0) \omega_n \frac{R^n}{n}$$

□

Proposition 3.9
Seien $u, v \in C(\overline{B_R(x_0)})$. Dann gilt:

a) *Linearität:* $m_R(x_0, \lambda u + \mu v) = \lambda m_R(x_0, u) + \mu m_R(x_0, v)$

b) *Monotonie:* $u \leq v$ *auf* $\partial B_R(x_0) \Rightarrow m_R(x_0, u) \leq m_R(x_0, v)$

c) $u(x) \equiv c$ *auf* $\partial B_R(x_0) \Rightarrow m_R(x_0, u) = c$

d) $a \leq u(x) \leq b \Rightarrow a \leq m_R(x_0, u) \leq b$. *Gleichheit gilt genau dann, wenn* $u \equiv a$ *oder* $u \equiv b$ *auf* $\partial B_R(x_0)$ *gilt.*

Entsprechendes gilt für den Volumenmittelwert.

Beweis. Nur Gleichheitsfall in d):
Erinnerung Ana III: $v \geq 0$ in $\overline{\Omega}$, $v \in C(\overline{\Omega})$. Falls

$$\int_\Omega v \, dx = 0 \Rightarrow v \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

Hier gilt Ähnliches für die Oberflächenintegrale.

$$a = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \oint_{\partial B_R(x_0)} u \, d\sigma \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \oint_{\partial B_R(x_0)} (u(x) - a) \, d\sigma = 0$$

$$\overset{u \text{ stetig, } u \geq a}{\Longrightarrow} \quad u \equiv a.$$

□

Satz 3.10 (Maximum- und Minimumprinzip harmonischer Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch in Ω und nicht konstant. Dann nimmt u in keinem Punkt von Ω ein Maximum oder Minimum an.

Korollar 3.11
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in C(\overline{\Omega})$ und harmonisch in Ω.
Sei $M := \max_{\overline{\Omega}} u, m := \min_{\overline{\Omega}} u$.

a) *Es gibt Punkte $x_*, x^* \in \partial\Omega : M = u(x^*), m = u(x_*)$.*

b) *Falls $m < M$, dann gilt $m < u(x) < M \; \forall x \in \Omega$.*

c) *Falls $u(x) \underset{\geq}{\overset{\leq}{=}} \alpha \; \forall x \in \partial\Omega \Rightarrow u(x) \underset{\geq}{\overset{\leq}{=}} \alpha \; \forall x \in \Omega$.*

d) *Falls $u \equiv \alpha$ auf $\partial\Omega \Rightarrow u \equiv \alpha$ in $\overline{\Omega}$.*

Beweis von Satz 3.10. Angenommen u besitzt in $x_1 \in \Omega$ ein Maximum, d.h.

$$A := \max_\Omega u = u(x_1).$$

Da u nicht konstant ist existiert ein $x_0 \in \Omega : u(x_0) < A$. Verbinde x_0, x_1 durch einen Weg $\gamma : [0, 1] \to \Omega$, mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$.

Sei $\tilde{x}$ der erste Punkt auf γ mit $u(\tilde{x}) = A$, d.h. $\tilde{x} = \gamma(\tilde{t})$, $\tilde{t} := \inf\{t \in (0, 1] : u(\gamma(t)) = A\}$. Beachte: $\tilde{t} \in (0, 1]$. Sei $B = B_\rho(\tilde{x})$ eine Kugel mit Radius ρ mit $\overline{B_\rho(\tilde{x})} \subset \Omega$ und $x_0 \notin \overline{B}$. $\exists x_2 \in \partial B : u(x_2) < A$ (im Punkte x_2 trifft γ erstmals auf ∂B). Wegen Proposition 3.9 und $u|_{\partial B_\rho(\tilde{x})} \leq A$, $u(x_2) < A$ folgt $m_\rho(\tilde{x}, u) < A$, denn „=“ gilt nur dann, wenn $u|_{\partial B_\rho(\tilde{x})} \equiv A$. Aber nach dem Mittelwertsatz von Gauß gilt: $m_\rho(\tilde{x}, u) = u(\tilde{x}) = A$; ein Widerspruch ↯. □

Beweis von Korollar 11.

(a) u stetig, $\overline{\Omega}$ kompakt, also existieren $x_*, x^* \in \overline{\Omega}$ mit $M = u(x^*), m = u(x_*)$.

Wenn u konstant ist, ist die Behauptung richtig. Ist u nicht konstant, folgt mit Satz 3.10 $x_*, x^* \in \partial\Omega$.

(b) Offenbar ist u nicht konstant. Die Behauptung folgt mit Satz 3.10, denn $\nexists x \in \Omega$ mit $u(x) = m$ bzw. $u(x) = M$.

(c) $\max_{\overline{\Omega}} u \overset{a)}{=} \max_{\partial\Omega} u \overset{Vor.}{\leq} \alpha \Rightarrow u(x) \leq \alpha \; \forall x \in \Omega$. Entsprechendes gilt für $\min_{\overline{\Omega}} u$.

(d) Folgt direkt aus c).

□

Bisher ungeklärt: Kann eine auf Ω harmonische Funktion ein lokales Maximum oder Minimum haben?

Satz 3.12 (Lokale Extrema)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Falls u in Ω ein lokales Max oder Min besitzt, ist u konstant in Ω.

Der folgende Satz wird zum Beweis von Satz 3.12 benötigt.

Satz 3.13 (Satz von Walter Gustin, 1918)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ seien harmonisch. Sei $a \in \Omega, \rho > 0$ und $\lambda_0 \in (0, 1)$ so, dass

$$\frac{\rho}{\lambda_0} < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega).$$

Dann ist

$$I(\lambda) = \oint\limits_{\partial B_1(0)} u(a + \lambda\rho x)\, v(a + \frac{\rho}{\lambda} x)\, d\sigma$$

unabhängig von $\lambda \in (\lambda_0, 1]$.

Bemerkung zur Notation: Sei $v(x) := u(a + \lambda\rho x)$. Dann gilt

$$\nabla v(x) = \nabla\big(u(a + \lambda\rho x)\big) \overset{\text{Kettenr.}}{=} (\nabla u)(a + \lambda\rho x) \cdot \lambda\rho$$

Hierbei bedeutet $\nabla\big(u(a+\lambda\rho x)\big)$, dass der Gradient auf die Funktion $u(a+\lambda\rho x)$ wirkt. Hingegen bedeutet $(\nabla u)(a + \lambda\rho x)$ die Auswertung der Funktion ∇u an der Stelle $a + \lambda\rho x$.

Beweis von Satz 3.13. Für $x \in \partial B_1(0), \lambda \in (\lambda_0, 1]$ gilt:

$$\left.\begin{array}{llllll} |\lambda\rho x| & = \lambda\rho & \leq \rho & < \dfrac{\rho}{\lambda_0} & < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega) & \Rightarrow a + \lambda\rho x \in \Omega. \\ |\dfrac{\rho}{\lambda} x| & = \dfrac{\rho}{\lambda} & & < \dfrac{\rho}{\lambda_0} & < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega) & \Rightarrow a + \dfrac{\rho}{\lambda} x \in \Omega. \end{array}\right\} \Rightarrow I(\lambda) \text{ wohldefiniert.}$$

$$I'(\lambda) = \oint\limits_{\partial B_1(0)} (\nabla u)(a + \lambda\rho x) \cdot \rho x \; v(a + \frac{\rho}{\lambda} x) + u(a + \rho\lambda x)(\nabla v)(a + \frac{\rho}{\lambda} x) \cdot (-\frac{\rho}{\lambda^2} x)\, d\sigma$$

Definiere für $1-\epsilon < |x| < 1+\epsilon$ (wobei $\epsilon > 0$ so klein ist, dass $a+\rho\lambda x, a+\frac{\rho}{\lambda}x \in \Omega$):

$$U(x) = u(a+\rho\lambda x)$$
$$V(x) = v(a+\frac{\rho}{\lambda}x)$$

Dann gilt:

$$\nabla U(x) = (\nabla u)(a+\rho\lambda x)\lambda\rho, \qquad \Delta U(x) = (\Delta u)(a+\rho\lambda x)\lambda^2\rho^2$$
$$\nabla V(x) = (\nabla v)(a+\frac{\rho}{\lambda}x)\frac{\rho}{\lambda}, \qquad \Delta V(x) = (\Delta v)(a+\frac{\rho}{\lambda}x)\frac{\rho^2}{\lambda^2}$$

d.h.

$$\begin{aligned} I'(\lambda) =& \frac{1}{\lambda} \oint_{\partial B_1(0)} \Big(\underbrace{x}_{=\nu(x)} \cdot \nabla U(x)V(x) - U(x)\nabla V(x) \cdot \underbrace{x}_{=\nu(x)} \Big)\, d\sigma \\ \overset{\text{Green.}}{\underset{\text{Formel}}{=}}& \frac{1}{\lambda} \int_{B_1(0)} \Big(\Delta U(x)V(x) - U(x)\Delta V(x) \Big)\, dx = 0, \end{aligned}$$

da U, V harmonisch in $B_1(0)$.

□

Beweis Satz 3.12. Angenommen u besitzt im Punkt $x_0 \in \Omega$ ein lokales Minimum, d.h. es existiert eine Kugel $B = B_\varepsilon(x_0)$ mit $u(x_0) = \min_{\overline{B}} u$.

Nach Satz 3.10 gilt: $u(x) \equiv u(x_0)$ in $\overline{B}$. O.B.d.A. $u(x_0) = 0$, sonst betrachte $\tilde{u}(x) = u(x) - u(x_0)$.

Wir beweisen die folgende Aussage:

(A) Ist $a \in \Omega$, $\operatorname{dist}(a, \partial\Omega) > 4\varepsilon$ und ist $u \equiv 0$ in $B_\varepsilon(a)$, so folgt $u \equiv 0$ in $B_{2\varepsilon}(a)$.

Wir verwenden Satz 3.13 mit

$$u = v, \quad \lambda_0 \in \left(\frac{2\varepsilon}{\operatorname{dist}(a, \partial\Omega)}, \ \frac{1}{2} \right), \quad \lambda = \frac{1}{2} \in (\lambda_0, 1] \text{ und } \rho = 2\varepsilon.$$

Dann gilt

$$I(1) = I(\frac{1}{2}) \text{ d.h., } \oint_{\partial B_1(0)} u^2(a+2\varepsilon x)\, d\sigma = \oint_{\partial B_1(0)} \overbrace{u(a+\varepsilon x)}^{=0 \text{ auf } B_1(0)} u(a+4\varepsilon x)\, d\sigma = 0$$

Folgerung: $u \equiv 0$ auf $\partial B_{2\varepsilon}(a)$, d.h. mit Korollar 3.11 d) gilt $u \equiv 0$ auf $\overline{B_{2\varepsilon}(a)}$. $\Rightarrow (A)$.

Sei nun $\bar{x} \in \Omega$ und $\gamma : [0,1] \to \Omega$ ein C^1-Weg, der $x_0, \bar{x}$ verbindet. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $\forall t \in [0,1] :$ $\operatorname{dist}(\gamma(t), \partial\Omega) > 4\varepsilon$. Wähle Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_p = \bar{x}$ auf γ mit $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Wir wissen $u \equiv 0$ auf $B_\varepsilon(x_0)$. Da $|x_0 - x_1| < \varepsilon$, gilt $B_\varepsilon(x_1) \subset B_{2\varepsilon}(x_0)$. Mit (A) folgt $u \equiv 0$ in $B_{2\varepsilon}(x_1)$. Als nächstes gilt $|x_2 - x_1| < \varepsilon$ und $B_\varepsilon(x_2) \subset B_{2\varepsilon}(x_1)$. Daraus folgt wieder mit (A) $u \equiv 0$ in $B_{2\varepsilon}(x_2)$. Induktiv folgt: $u \equiv 0$ in $B_{2\varepsilon}(x_i), i = 0, 1, \ldots, p$. Insbesondere $u(\bar{x}) = 0$. Da $\bar{x} \in \Omega$ beliebig gewählt wurde, folgt daraus $u \equiv 0$ in Ω. □

3.3 Greensche Funktionen und Dirichletsches RWP auf Kugeln

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Gesucht: harmonische Fortsetzung von f nach Ω, d.h. eine Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, u \in C(\overline{\Omega})$, die in Ω harmonisch ist und für die gilt:

$$u_{|\partial\Omega} = f.$$

Dieses Problem heißt Dirichletsches Randwertproblem für harmonische Funktionen.

Schreibweise:

$$\text{gegeben: } \Omega \subset \mathbb{R}^n, f \in C(\partial\Omega)$$
$$\text{gesucht: } u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ mit } \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beispiele

(a) $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$

Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi)$

gegeben:	$(x, y) \in \partial B_1(0), f(x, y) = \sin(2\varphi), f$ ist stetig auf $\partial B_1(0)$.
Harmonische Fortsetzung:	$u(x, y) := 2xy$.
	Dieses u ist harmonisch auf $B_1(0)$ (sogar auf $\mathbb{R}^2$).
Für $(x, y) \in \partial B_1(0)$ gilt:	$u(x, y) = 2r^2 \cos\varphi \sin\varphi = \sin(2\varphi) = f(x, y)$.

Da ausserdem $u \in C(\overline{B_1(0)})$, ist u Lösung des Dirichletschen RWPs.

Frage: Ist das die einzige harmonische Fortsetzung von f? Eine Antwort auf die Eindeutigkeitsfrage liefert Proposition 3.14.

(b) $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) : x_n > 0\}$, Ω ist also ein Halbraum.

$\partial\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) : x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$

gegeben: $f \equiv 0$. Trivialerweise ist also $f \in C(\partial\Omega)$.

gesucht: harmonische Fortsetzung. Es sind mehrere harmonische Fortsetzungen von f bekannt:

$$u_1(x) \equiv 0, \quad u_2(x) = \alpha x_n, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In diesem Fall gibt es also keine Eindeutigkeit der harmonischen Fortsetzung.

Proposition 3.14
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für $f \in C(\partial\Omega)$ hat das Dirichletsche RWP höchstens eine Lösung.

Bemerkung Dies ist keine Existenzaussage. Der Satz besagt nur: wenn es eine Lösung gibt, dann ist diese eindeutig.

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonische Fortsetzungen von f.

Dann ist $v := u_1 - u_2 \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ und es gilt

$$\Delta v = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0 \text{ in } \Omega, \text{ sowie } v = f - f = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Mit dem Korollar 3.11 d) folgt $v \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$, also ist $u_1 = u_2$. □

Definition 3.15 (Fundamentallösung)
Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) $g_0 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *sei definiert durch*

$$g_0(r) = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi} \log r, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases}$$

b) Die Funktion

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \\ \quad x \mapsto g_0(|x|) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Bemerkung Nach Korollar 3.4 ist γ harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Satz 3.16 (Greensche Darstellungsformel)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und γ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung. Dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_\Omega \gamma(x-y)(-\Delta u)(y)\, dy + \oint_{\partial\Omega} \Big(\gamma(x-y)\nabla u(y) - u(y)\nabla_y \gamma(x-y)\Big) \cdot \nu_y \, d\sigma_y.$$

Notation Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $h : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sei

$$\|h\|_{\infty,A} := \sup_{x\in A} |h(x)|.$$

Dabei ist $\|h\|_{\infty,A} \in [0,\infty]$ und insbesondere $\|h\|_{\infty,A} = \infty$ zulässig.

Beweis. (a) Wir zeigen

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon(x)} \gamma(x-y)(-\Delta u)(y)\, dy = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

$$\left|\int_{B_\varepsilon(x)} \gamma(x-y)(-\Delta u)(y)\, dy\right| \leq \|\Delta u\|_{\infty,B_\varepsilon(x)} \int_{B_\varepsilon(x)} |\gamma(x-y)|\, dy$$

$$= \|\Delta u\|_{\infty,B_\varepsilon(x)} \int_{B_\varepsilon(0)} |\gamma(z)|\, dz \overset{\text{Cavalieri}}{=} \|\Delta u\|_{\infty,B_\varepsilon(x)} \int_0^\varepsilon \Bigg(\oint_{\partial B_\tau(0)} |\overbrace{\gamma(z)}^{g_0(\tau)}|\, d\sigma_z \Bigg) d\tau$$

$$= \|\Delta u\|_{\infty,B_\varepsilon(x)} \cdot \begin{cases} \displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{1}{2\pi} |\log \tau| 2\pi\tau\, d\tau, & n = 2 \\ \displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{1}{(n-2)\omega_n} \tau^{2-n} \omega_n \tau^{n-1}\, d\tau, & n \geq 3 \end{cases}$$

$$= \|\Delta u\|_{\infty,B_\varepsilon(x)} \cdot \begin{cases} \displaystyle\int_0^\varepsilon \tau |\log\tau|\, d\tau, & n = 2 \\ \displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{\tau}{(n-2)}\, d\tau = \frac{\epsilon^2}{2(n-2)}, & n \geq 3 \end{cases}$$

Fazit (ohne im Fall $n = 2$ das Integral ausrechnen zu müssen):

$$\int\limits_{B_\varepsilon(x)} \gamma(x-y)(-\Delta u)(y)\, dy \quad \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Mit $\Omega = (\Omega \setminus B_\varepsilon(x)) \cup B_\varepsilon(x)$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gilt:

$$\int\limits_\Omega \gamma(x-y)(-\Delta u)(y)\, dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \gamma(x-y)(-\Delta u)(y)\, dy.$$

(b) Benutze Greensche Identität (siehe A.1, Lemma 3) auf $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \gamma(x-y)(-\Delta u)(y) + u(y)\underbrace{\Delta_y\big(\gamma(x-y)\big)}_{=0}\, dy \\
&= \oint\limits_{\partial\Omega} \Big(u(y)\nabla_y\big(\gamma(x-y)\big) - \gamma(x-y)\nabla_y u(y)\Big)\cdot \nu_y\, d\sigma_y \\
&\quad + \underbrace{\oint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\nabla_y\big(\gamma(x-y)\big)\cdot\nu_y\, d\sigma_y}_{=:I_1} - \underbrace{\oint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \gamma(x-y)\nabla_y u(y)\cdot\nu_y\, d\sigma_y}_{=:I_2}
\end{aligned}$$

Beachte, dass sowohl für I_1 als auch I_2 gilt: die äussere Normale bzgl. $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ ist $\nu_y = \frac{-(y-x)}{|y-x|}$.

(c) Abschätzung von I_2 für $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le \oint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} |\gamma(x-y)|\,|\nabla u(y)|\, d\sigma_y \le \|\nabla u\|_{\infty,B_\varepsilon(x)}\, |g_0(\varepsilon)|\, \omega_n\varepsilon^{n-1} \\
&= \|\nabla u\|_{\infty,B_\varepsilon(x)} \cdot \begin{cases} |\log\varepsilon|\cdot\varepsilon, & n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)}\varepsilon, & n\ge 3 \end{cases} \quad \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.
\end{aligned}$$

(d) Nun untersuchen wir I_1 für $\varepsilon \to 0$. Zuerst berechne

$$\nabla_y(\gamma(x-y)) = g'(|x-y|)\cdot\nabla_y(|x-y|) = g'(|x-y|)\cdot\frac{y-x}{|y-x|}.$$

Für $y \in \partial B_\varepsilon(x)$ gilt also $\nabla_y(\gamma(x-y))\cdot\nu_y = -g'(\varepsilon) = \frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
I_1 - u(x) &= -g'(\varepsilon) \oint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\, d\sigma_y \; - u(x) \\
&= \frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}} \oint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \big(u(y)-u(x)\big)\, d\sigma_y.
\end{aligned}$$

Da u stetig im Punkt x ist folgt:

$$\forall\tilde\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 :\; y\in\Omega \text{ und } |y-x| < \delta \Rightarrow |u(y)-u(x)| < \tilde\varepsilon$$

und damit

$$|I_1 - u(x)| \leq \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \oint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \tilde{\varepsilon}\, d\sigma_y = \tilde{\varepsilon}, \qquad \text{d.h. } \lim_{\varepsilon \to 0} I_1 = u(x).$$

Bilde Grenzwert $\varepsilon \to 0$ in (b) und verwende (a), (c), (d) $\Rightarrow$ Behauptung. □

Definition 3.17 (Greensche Funktion)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion

$$G(x,y) = \gamma(x-y) + w(x,y), \quad x \neq y, \quad x \in \Omega, \quad y \in \overline{\Omega}$$

heißt Greensche Funktion für den Laplace-Operator auf Ω, falls gilt:

i) $\forall x \in \Omega$ ist $w(x,\cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\Delta_y w(x,y) = 0$ in $\overline{\Omega}$,

ii) $\forall x \in \Omega, \forall y \in \partial\Omega$ gilt: $G(x,y) = 0$.

Korollar 3.18
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und G eine Greensche Funktion auf Ω.
Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$, dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int\limits_\Omega G(x,y)(-\Delta u)(y)\, dy - \oint\limits_{\partial\Omega} u(y) \nabla_y G(x,y) \cdot \nu_y \, d\sigma_y.$$

Beweis. Benutze Greensche Identität (vgl. A.1, Lemma 3):

$$\forall x \in \Omega: \int\limits_\Omega \Big(w(x,y)\Delta u(y) - u(y) \overbrace{\Delta_y w(x,y)}^{=0} \Big)\, dy = \oint\limits_{\partial\Omega} \Big(w(x,y)\nabla u(y) - u(y) \nabla_y w(x,y) \Big) \cdot \nu_y \, d\sigma_y$$

Gleichung umstellen zu $0 = ...$, dann Gleichung zur Formel in Satz 3.16 addieren. Es folgt die Behauptung unter Benutzung von Bedingung ii) in Definition 3.17 . □

Korollar 3.19
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, G eine Greensche Funktion für Ω. Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine harmonische Fortsetzung von $f \in C(\partial\Omega)$ dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) = -\oint\limits_{\partial\Omega} f(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\, d\sigma_y. \tag{$*$}$$

Hier wird die Bezeichnung $\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) := \nabla_y G(x,y) \cdot \nu_y$ auf $\partial\Omega$ benutzt.

Idee: Falls man u durch ($*$) definiert, erhält man dann eine harmonische Fortsetzung von f?

Frage: Existiert $G(x,y)$ überhaupt? Wir beantworten diese Frage nun am Beispiel der Einheitskugel.

Satz 3.20 (Greensche Funktion der Einheitskugel)
Die Greensche Funktion für die Einheitskugel ist wie folgt gegeben: $\forall x, y \in \overline{B_1(0)}, x \neq y$:

$$G(x,y) = \begin{cases} \gamma(x-y) - \gamma(|x|(x^* - y)), & x \neq 0, \\ \gamma(y) - g_0(1), & x = 0, \end{cases}$$

mit $x^* := \frac{x}{|x|^2}$ für $x \neq 0$.

Beweis. i) Wir benutzen die Notation aus Definition 3.17. Dann gilt:

$$w(x,y) = \begin{cases} -\gamma(|x|(x^* - y)), & x \neq 0, \\ -g_0(1), & x = 0. \end{cases}$$

Sei $n \geq 3$ (für $n = 2$ ist eine kleine Modifikation der Argumentation nötig). Für $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$ ist $x^* \in \overline{B_1(0)}^C$, d.h. $w(x,\cdot) \in C^\infty(\overline{B_1(0)})$ und

$$\Delta_y w(x,y) = -|x|^{2-n} \underbrace{(\Delta_y \gamma)}_{=0}(x^* - y) = 0 \quad \forall y \in \overline{B_1(0)}.$$

Im Fall $x = 0$ gilt $w(0,y) = -g_0(1)$, d.h. $\Delta_y w(0,y) = -\Delta g_0(1) = 0$.

ii) Zeige: für $x, y \in \overline{B_1(0)}$ mit $x \neq y$ gilt $G(x,y) = G(y,x)$.

1. Fall $x = 0, y \neq 0$:

$$\begin{aligned} G(0,y) &= \gamma(y) - g_0(1) \\ G(y,0) &= \gamma(y - 0) - \gamma(|y|(y^* - 0)) \\ &= \gamma(y) - \underbrace{\gamma\left(\frac{y}{|y|}\right)}_{g_0(1)} \end{aligned}$$

2. Fall $x \neq 0, y \neq 0$:

$$\text{Es gilt } (|x||x^* - y|)^2 = |x|^2 \left(|x^*|^2 + |y|^2 - 2x^* \cdot y\right) = |x|^2 \left(\frac{1}{|x|^2} + |y|^2 - \frac{2x \cdot y}{|x|^2}\right)$$

und

$$(|y||y^* - x|)^2 = |y|^2 \left(\frac{1}{|y|^2} + |x|^2 - \frac{2y \cdot x}{|y|^2}\right) = (|x||x^* - y|)^2.$$

Damit ergibt sich $w(x,y) = w(y,x)$. Zusammen mit $\gamma(x - y) = \gamma(y - x)$ erhält man $G(x,y) = G(y,x)$.

iii) Sei jetzt $y \in \partial B_1(0), x \in B_1(0)$, d.h. insbesondere $|y| = 1$ und $y = y^*$. Dann ist

$$G(0,y) = \underbrace{\gamma(y)}_{g_0(|y|)} - g_0(1) = 0$$

und für $x \neq 0$ ist

$$G(x,y) \overset{(ii)}{=} G(y,x) = \gamma(y - x) - \gamma(\underbrace{|y|}_{=1}(\underbrace{y^*}_{=y} - x)) = 0.$$

$\square$

Korollar 3.21
Es sei $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$ eine harmonische Fortsetzung von $f \in C(\partial B_1(0))$. Dann gilt die Poissonsche Darstellungsformel:

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{\omega_n} \oint_{\partial B_1(0)} \frac{f(y)}{|x - y|^n} \, d\sigma_y, \quad \forall x \in B_1(0)$$

Beweis. Berechne zunächst $\forall y \in \partial B_1(0), x \in B_1(0)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) &= \nabla_y G(x,y) \cdot y \\
&\overset{x\neq 0}{\underset{n\geq 3}{=}} \frac{1}{(n-2)\omega_n}\left((2-n)|x-y|^{1-n}\frac{y-x}{|y-x|} - \frac{(2-n)}{|x|^{n-2}}|x^*-y|^{1-n}\frac{y-x^*}{|y-x^*|}\right)\cdot y \\
&= \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{x^*-y}{|x^*-y|^n}\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)\cdot y = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{x^*-y}{|y^*-x|^n}\frac{|x|^2}{|y|^n}\right)\cdot y \\
&= \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{x-y-x+y|x|^2}{|x-y|^n}\right)\cdot y = \frac{|x|^2-1}{\omega_n|x-y|^n}.
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde in der vorletzten Zeile die aus Satz 3.20 bekannte Gleichheit $|x^*-y||x| = |y^*-x||y|$ benutzt. Das Ergebnis dieser Rechnungen gilt (wie sich leicht nachrechnen lässt) auch für $x = 0$ und für $n = 2$. Mit Korollar 3.19 folgt:

$$
u(x) = -\oint_{\partial B_1(0)} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) f(y)\, d\sigma_y = \frac{1-|x|^2}{\omega_n}\oint_{\partial B_1(0)} \frac{f(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y
$$

□

Achtung! Korollar 3.21 löst noch nicht das Dirichlet-Problem auf der Kugel. Aber es legt nahe, wie die Lösung aussehen muss. Der Nachweis, dass man somit tatsächlich eine Lösung erhält, wird nun im nächsten Satz gegeben.

Satz 3.22
Sei $f \in C(\partial B_1(0))$ und definiere

$$
u(x) := \begin{cases} \dfrac{1-|x|^2}{\omega_n}\displaystyle\oint_{\partial B_1(0)} \frac{f(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y, & x \in B_1(0), \\ f(x), & x \in \partial B_1(0). \end{cases}
$$

Dann ist u die harmonische Fortsetzung von f, d.h. $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$ und $\Delta u = 0$ in $B_1(0)$.

Beweis. Sei $x_0 \in B_1(0)$ und wähle $\delta > 0$ so, dass $1 - |x_0| > \delta > 0$ ist. Betrachte die Abbildung

$$
P : \begin{cases} A := \overline{B_\delta(x_0)} \times \partial B_1(0) \to \mathbb{R}, \\ \qquad (x,y) \mapsto \frac{1-|x|^2}{\omega_n|x-y|^n}. \end{cases}
$$

Dann ist P bzgl. x unendlich oft stetig differenzierbar und $D_x^\alpha P : A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig in beiden Variablen für jeden Multi-Index α. Daher gilt:

$$
D_x^\alpha u(x) = \oint_{\partial B_1(0)} D_x^\alpha P(x,y) f(y)\, d\sigma_y.
$$

Berechne nun $\Delta u(x)$. Dazu

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\right) = \frac{-2x_i}{|x-y|^n} - n(1-|x|^2)|x-y|^{-n-1}\cdot\frac{x_i-y_i}{|x-y|} = \frac{-2x_i}{|x-y|^n} - \frac{n(1-|x|^2)(x_i-y_i)}{|x-y|^{n+2}}.
$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen gilt:

$$
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\right) = \frac{-2}{|x-y|^2} + \frac{2nx_i(x_i-y_i)}{|x-y|^{n+2}} + \frac{2nx_i(x_i-y_i)}{|x-y|^{n+2}} - \frac{n(1-|x|^2)}{|x-y|^{n+2}} + \frac{n(n+2)(1-|x|^2)(x_i-y_i)^2}{|x-y|^{n+4}}.
$$

Also gilt

$$\Delta_x\left(\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\right) = \frac{-2n|x-y|^2+4nx\cdot(x-y)-n^2(1-|x|^2)+n(n+2)(1-|x|^2)}{|x-y|^{n+2}} = 0$$

und folglich

$$\Delta u(x) = \oint\limits_{\partial B_1(0)} \Delta_x P(x,y)f(y)\,d\sigma_y = 0 \quad \text{in } B_1(0).$$

Noch zu zeigen: ist $x_1 \in \partial B_1(0)$ so gilt

$$\lim_{\substack{x\to x_1\\ x\in B_1(0)}} u(x) = f(x_1).$$

Benutze zuerst Korollar 3.21 mit $u \equiv 1$, d.h.

$$1 = \frac{1-|x|^2}{\omega_n}\oint\limits_{\partial B_1(0)} \frac{1}{|x-y|^n}\,d\sigma_y \quad \forall x\in B_1(0) \quad (\star)$$

Damit erhält man:

$$u(x)-f(x_1) = \frac{1-|x|^2}{\omega_n}\oint\limits_{\partial B_1(0)} \frac{f(y)-f(x_1)}{|x-y|^n}\,d\sigma_y \quad \forall x\in B_1(0).$$

Da f auf $\partial B_1(0)$ (gleichmäßig) stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|y-x_1|<\delta, y\in\partial B_1(0) \Rightarrow |f(y)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

Sei

$$M := \{y\in\partial B_1(0) : |x_1-y|<\delta\} \text{ und } M^C := \{y\in\partial B_1(0) : |x_1-y|\geq\delta\}$$

so dass $\partial B_1(0) = M\cup M^C$. Angenommen $|x-x_1|<\frac{\delta}{2}, x\in B_1(0)$. Für $y\in M^C$ gilt

$$|y-x| \geq |y-x_1|-|x_1-x| > \delta-\frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

und damit

$$\frac{|f(y)-f(x_1)|}{|x-y|^n} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{(\frac{\delta}{2})^n}. \qquad (*)$$

Mit der Stetigkeit im ersten Summanden und $(*)$ folgt:

$$\begin{aligned}
|u(x)-f(x_1)| &\leq \frac{1-|x|^2}{\omega_n}\left(\oint\limits_M \frac{|f(y)-f(x_1)|}{|x-y|^n}\,d\sigma_y + \oint\limits_{M^C} \frac{|f(y)-f(x_1)|}{|x-y|^n}\,d\sigma_y\right)\\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{1-|x|^2}{\omega_n}\left(\oint\limits_M \frac{\varepsilon}{|x-y|^n}\,d\sigma_y + \oint\limits_{M^C} \frac{2\|f\|_\infty}{(\frac{\delta}{2})^n}\,d\sigma_y\right)\\
&\leq \frac{1-|x|^2}{\omega_n}\left(\oint\limits_{\partial B_1(0)} \frac{\varepsilon}{|x-y|^n}\,d\sigma_y + \oint\limits_{\partial B_1(0)} \frac{2\|f\|_\infty}{(\frac{\delta}{2})^n}\,d\sigma_y\right)\\
&\overset{(\star)}{=} \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{(\frac{\delta}{2})^n}(1-|x|^2) \leq 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

falls $|x-x_1|\leq\tilde{\delta}<\frac{\delta}{2}$ und $\tilde{\delta}$ hinreichend klein ist. Beachte dabei

$$1-|x|^2 \leq 2(1-|x|) \leq 2|x-x_1|.$$

□

Frage: Wie sieht Lösung für eine allgemeine Kugel aus?

Umrechnung auf allgemeine Kugeln

Sei $B := B_R(x_0), f \in C(\partial B)$. Setze

$$f_R(x) := f(Rx + x_0), x \in \partial B_1(0).$$

Damit ist f_R stetig auf $\partial B_1(0)$ und

$$u_R(x) := \frac{1-|x|^2}{\omega_n} \oint\limits_{\partial B_1(0)} \frac{f_R(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

ist harmonische Fortsetzung von f_R auf $B_1(0)$.

Definiere $u(x) := u_R\left(\frac{x-x_0}{R}\right)$, $x \in \overline{B_R(x_0)}$. Wegen $\Delta u_R = R^2 \Delta u = 0$ ist u harmonisch in $B_R(x_0)$. Für $x \in \partial B_R(x_0)$ gilt:

$$u(x) = u_R\Big(\underbrace{\frac{x-x_0}{R}}_{\in \partial B_1(0)}\Big) = f_R\left(\frac{x-x_0}{R}\right) = f(x),$$

d.h. u ist harmonische Fortsetzung von f.

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1-\frac{|x-x_0|^2}{R^2}}{\omega_n} \oint\limits_{\partial B_1(0)} \frac{f(Ry+x_0)}{|\frac{x-x_0}{R}-y|^n} d\sigma_y \\
&\underset{d\sigma_\eta = R^{n-1} d\sigma_y}{\overset{Ry+x_0=:\eta}{=}} \frac{R^2-|x-x_0|^2}{R^2\omega_n} \oint\limits_{\partial B_R(x_0)} \frac{f(\eta)}{|x-\eta|^n} R^n R^{1-n}\, d\sigma_\eta \\
&= \frac{R^2-|x-x_0|^2}{R\omega_n} \oint\limits_{\partial B_R(x_0)} \frac{f(\eta)}{|x-\eta|^n}\, d\sigma_\eta.
\end{aligned}$$

Die Poissonsche Integralformel für eine Kugel $B_R(x_0)$ lautet also:

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{R^2-|x-x_0|^2}{R\omega_n} \oint\limits_{\partial B_R(x_0)} \dfrac{f(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y, & x \in B_R(x_0), \\ f(x), \quad x \in \partial B_R(x_0). \end{cases}$$

3.4 Harnacksche Ungleichung, Satz von Liouville

Satz 3.23 (Harnacksche Ungleichung)
Sei $u : B_R(0) \to [0,\infty)$ harmonisch. Dann gilt für alle $x \in B_R(0)$:

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

Beweis. Der Poisson-Kern auf $B_R(0)$ lautet:

$$P_R(x,y) = \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n}, \qquad x \in B_R(0), y \in \partial B_R(0).$$

Benutze die Ungleichung $R-|x| \leq |x-y| \leq |x|+|y| = R+|x|$. Daraus folgt

$$\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n}\frac{1}{(R+|x|)^n} \leq P_R(x,y) \leq \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n}\frac{1}{(R-|x|)^n}.$$

Falls $u \in C(\overline{B_R(0)})$, dann multipliziere mit $u(y)$ und integriere über $\partial B_R(0)$. Verwende dabei die Mittelwertformel $\oint_{\partial B_R(0)} u(y)\, d\sigma_y = \omega_n R^{n-1} u(0)$. Es folgt

$$\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n}\frac{1}{(R+|x|)^n}\, u(0)\omega_n R^{n-1} \leq \oint\limits_{\partial B_R(0)} P_R(x,y)u(y)\, d\sigma_y \leq u(0)\,\omega_n\, R^{n-1}\,\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n(R-|x|)^n}.$$

Kürzen liefert

$$R^{n-2}\,\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}\,u(0)\;\leq \underbrace{\oint\limits_{\partial B_R(0)} P_R(x,y)\,u(y)\,d\sigma_y}_{u(x)} \leq R^{n-2}\,\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}\,u(0).$$

Falls nur gilt $u \in C^2(B_R(0))$ (es wird also keine Stetigkeit mehr auf $\overline{B_R(0)}$ vorausgesetzt), dann benutze die Harnack-Ungleichung auf $\overline{B_\rho(0)}$ mit $0<\rho<R$ und bilde den Limes $\rho \to R$. $\square$

Korollar 3.24
Sei $u : B_R(0) \to [0,\infty)$ harmonisch. Dann gilt:

$$u(x) \leq 3^n\, u(y) \qquad \forall x,y \in \overline{B_{R/2}(0)}$$

Insbesondere

$$\max_{x\in\overline{B_{R/2}(0)}} u(x) \leq 3^n \min_{x\in\overline{B_{R/2}(0)}} u(x)$$

Beweis. Für $|x| \leq \frac{R}{2}$ gilt $R+|x| \leq \frac{3}{2}R$ und $R-|x| \geq \frac{R}{2}$. Einsetzen in die Harnacksche Ungleichung liefert

$$\alpha\, u(0) \leq u(x) \leq \beta\, u(0) \qquad \forall x \in \overline{B_{\frac{R}{2}}(0)},$$

wobei

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{3}{2})^{n-1}} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}, \quad \beta = \frac{\frac{3}{2}}{(\frac{1}{2})^{n-1}} = 3\cdot 2^{n-2}$$

Damit erhalten wir

$$u(x) \leq \beta\, u(0) \leq \frac{\beta}{\alpha}\, u(y) = 3^n\, u(y).$$

$\square$

Satz 3.25 (Allgemeine Harnacksche Ungleichung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\Omega_0 \subset \Omega$ ein Teilgebiet, sodass $\overline{\Omega}_0$ kompakt und $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ ist. Dann existiert eine Konstante $C>0$, die nur von Ω_0 und Ω abhängt, mit folgender Eigenschaft. Ist $u \geq 0$ harmonisch in Ω, dann gilt:

$$\max_{\overline{\Omega}_0} u \leq C \min_{\overline{\Omega}_0} u.$$

Beweis. Sei $0 < R < \operatorname{dist}(\overline{\Omega}_0, \partial\Omega)$. Überdecke gemäss dem Überdeckungssatz von Heine-Borel $\overline{\Omega}_0$ mit endlich vielen Kugeln $B_{R/2}(a_1),\ldots,B_{R/2}(a_K)$ mit geeigneten Mittelpunkten $a_1,\ldots,a_k \in \overline{\Omega}_0$. Setze $M = \{B_{R/2}(a_1),\ldots,B_{R/2}(a_K)\}$, d.h. die Anzahl der Elemente von M ist K. Seien $x,y \in \Omega_0, x \neq y$.

Behauptung* (Beweis im Anschluss): Es existieren Punkte $x_1, \dots, x_p \in \overline{\Omega}_0$ mit $x_1 = x, x_p = y$ und Kugeln $B_1, \dots, B_p \in M$ mit $B_i \neq B_j$ $(i \neq j)$ und $x_i, x_{i+1} \in \overline{B_i}, i = 1, \dots, p-1$.

Dann folgt mit Korollar 3.24

$$u(x_2) \leq 3^n\, u(x_1), \quad u(x_3) \leq 3^n u(x_2), \quad \dots, \quad u(x_p) \leq 3^n\, u(x_{p-1}).$$

Zusammensetzen liefert die Kette von Ungleichungen

$$u(y) = u(x_p) \leq (3^n)^{p-1}\, u(x_1) = (3^n)^{p-1}\, u(x) \leq \underbrace{3^{nK}}_{=:C}\, u(x).$$

□

*Beweis der Behauptung**. Verbinde x, y durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega_0, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Finde $B_1 \in M$ mit $x \in B_1$ und setze $x_1 := x$.

Falls $y \in \overline{B_1}$: fertig, $x_2 = y$.

Falls $y \notin \overline{B_1}$: $\exists t_1 \in (0,1] : x_2 = \gamma(t_1) \in \partial B_1, \gamma(t) \notin \overline{B_1} \quad \forall t \in (t_1, 1]$. Da $x_2 \notin B_1$, gibt es $B_2 \in M, B_1 \neq B_2$ und $x_2 \in B_2$.

Falls $y \in \overline{B_2}$: fertig, $x_3 = y$.

Falls $y \notin \overline{B_2}$: $\exists t_2 \in (t_1, 1] : x_3 = \gamma(t_2) \in \partial B_2, \gamma(t) \notin \overline{B_1} \cup \overline{B_2} \quad \forall t \in (t_2, 1]$.

Nach endlich vielen Schritten (es gibt nur endlich viele Kugeln in M) gilt $x_p = y$. □

Satz 3.26 (Satz von Liouville)
Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und nach oben oder unten beschränkt. Dann ist u konstant.

Beweis. Es sei $u(x) \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (falls u nach unten beschränkt ist, betrachte $-u$).

Definiere $w(x) := C - u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $w \geq 0$ und harmonisch in $\mathbb{R}^n$. Mit der Harnackschen Ungleichung aus Satz 3.23 gilt jetzt:

$$R^{n-2} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}}\, w(0) \leq w(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}}\, w(0).$$

Halte x fest und bilde den Limes $R \to \infty$. Dies liefert

$$w(0) \leq w(x) \leq w(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

also ist w und somit auch u konstant auf $\mathbb{R}^n$. □

Satz 3.27 (Cauchy Abschätzung)
Zu jedem Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existiert eine Konstante $C_\alpha > 0$ mit folgender Eigenschaft. Ist $u : B_R(a) \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt mit

$$|u(x)| \leq M \quad \forall x \in B_R(a)$$

dann gilt

$$|D^\alpha u(a)| \leq \frac{C_\alpha M}{R^{|\alpha|}}.$$

Beweis. O.B.d.A. $a = 0$, ansonsten: $u(x + a) = \tilde{u}(x)$, $x \in B_R(0)$.

(a) Sei $R = 1$ und $u \in C(\overline{B_1(0)})$. Dann gilt für $x \in B_1(0)$

$$u(x) = \oint\limits_{\partial B_1(0)} P(x,y)u(y)\, d\sigma_y, \qquad \text{wobei } P(x,y) = \frac{1-|x|^2}{\omega_n\,|x-y|^n}.$$

Für $0 < \delta < 1$ und $|x| \leq \delta$ gilt nach Satz 3.22:

$$D^\alpha\, u(x) = \oint\limits_{\partial B_1(0)} D_x^\alpha P(x,y)u(y)\, d\sigma_y.$$

Für $x = 0$ gilt also

$$|D^\alpha u(0)| \leq M \underbrace{\oint\limits_{\partial B_1(0)} \left|\left(D_x^\alpha P\right)(0,y)\right|\, d\sigma_y}_{=:C_\alpha}.$$

(b) Allgemeiner Fall. Sei $u : B_R(0) \to \mathbb{R}$ harmonisch mit $|u(x)| \leq M$. Für $\rho \in (0,R)$ definiere $u_\rho(x) := u(\rho x), x \in \overline{B_1(0)}$, d.h. u_ρ ist harmonisch und stetig sogar auf $\overline{B_1(0)}$ und es gilt

$$D^\alpha\left(u_\rho(x)\right) = \rho^{|\alpha|}\left(D^\alpha u\right)(\rho x).$$

Mit (a) folgt

$$|D^\alpha\, u(0)|\, \rho^{|\alpha|} = |D^\alpha\, u_\rho(0)| \;\leq\; C_\alpha M.$$

Für $\rho \to R$ folgt die Behauptung.

□

Korollar 3.28
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und $|u(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega$. Dann gilt

$$|D^\alpha\, u(x)| \leq \frac{C_\alpha M}{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)^{|\alpha|}},$$

wobei C_α die Konstante aus Satz 3.27 ist.

Beweis. Wähle $x_0 \in \Omega$, setze $R = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ und wende Satz 3.27 auf die Kugel $B_R(x_0)$ an. □

3.5 Sub- und Superharmonische Funktionen

Definition 3.29 (Sub- und Superharmonische Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. u heißt subharmonisch (superharmonisch), falls für jede Kugel $B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} u(x_0) &\leq\; M_R(x_0,u) \;\textit{(subharmonisch)} \\ u(x_0) &\geq\; M_R(x_0,u) \;\textit{(superharmonisch)}\;. \end{aligned}$$

Dabei ist gemäss Definition 3.6:

$$M_R(x_0,u) := \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u\; dx.$$

Satz 3.30
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$, dann gilt:

(a) $\Delta u \geq 0$ *in* $\Omega \Rightarrow u$ *subharmonisch in* Ω.

(b) $\Delta u \leq 0$ *in* $\Omega \Rightarrow u$ *superharmonisch in* Ω.

Beweis. Sei $B_R(x_0)$ so, dass $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Mit der Greenschen Darstellungsformel 3.16 gilt:

$$\begin{aligned}
u(x_0) &= \int\limits_{B_R(x_0)} \gamma(x_0-y)(-\Delta u)(y)\,dy + \oint\limits_{\partial B_R(x_0)} \Big(\gamma(x_0-y)\nabla u(y) - u(y)\nabla_y\gamma(x_0-y)\Big)\cdot \nu_y\,d\sigma_y \\
&= \int\limits_{B_R(x_0)} \gamma(x_0-y)(-\Delta u)(y)\,dy + \oint\limits_{\partial B_R(x_0)} \underbrace{\gamma(\overbrace{x_0-y}^{\|\cdot\|=R})}_{=g_0(R)}\nabla u(y)\cdot\nu_y\,d\sigma_y - \oint\limits_{\partial B_R(x_0)} u(y)\underbrace{\nabla_y\gamma(x_0-y)\cdot\nu_y}_{-\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}}\,d\sigma_y \\
&= \int\limits_{B_R(x_0)} \gamma(x_0-y)(-\Delta u)(y)\,dy + g_0(R)\oint\limits_{\partial B_R(x_0)} \nabla u(y)\cdot\nu_y\,d\sigma + \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\oint\limits_{\partial B_R(x_0)} u(y)\,d\sigma_y \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{B_R(x_0)} \underbrace{(\gamma(x_0-y)-g_0(R))}_{\geq 0}(-\Delta u)(y)\,dy + m_R(x_0,u),
\end{aligned}$$

wobei hier der Gaußsche Integralsatz (Satz G.2) benutzt wurde.

Aus dieser Formel folgt im Fall (a) also $u(x_0) \leq m_R(x_0,u)$ und im Fall (b) ergibt sich $u(x_0) \geq m_R(x_0,u)$. Da nach dem Cavalieri-Prinzip gilt

$$M_{R'}(x_0,u) = \frac{n}{R'^n}\int_0^{R'} R^{n-1} m_R(x_0,u)\,dR,$$

folgt die Behauptung nun mittels Integration aus den Ungleichungen $u(x_0) \leq m_R(x_0,u)$ bzw. $u(x_0) \geq m_R(x_0,u)$. □

Satz 3.31 (Minimumprinzip für superharmonische Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C(\Omega)$ superharmonisch. Dann gilt:

(a) *Nimmt u sein Minimum in einem Punkt von Ω an, dann ist u konstant.*

(b) *Ω beschränkt, $u \in C(\overline{\Omega})$, dann gilt*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Aus $u(x) \geq a \quad \forall x \in \partial\Omega$ *folgt entweder* $u \equiv a$ *in* $\overline{\Omega}$ *oder* $u(x) > a \quad \forall x \in \Omega$.

Beweis. (a) Die Vorgehensweise ist ähnlich wie im Beweis zu Satz 3.10. Die Funktion u besitze in $x_1 \in \Omega$ ein Minimum $a := \min_\Omega u = u(x_1)$. Angenommen u ist nicht konstant. Dann $\exists x_0 \in \Omega : u(x_0) > a$. Verbinde x_0, x_1 durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$, mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Sei $\tilde{x}$ der erste Punkt auf γ mit $u(\tilde{x}) = a$, d.h. $\tilde{x} = \gamma(\tilde{t})$, $\tilde{t} := \inf\{t \in (0,1] : u(\gamma(t)) = a\}$. Dann ist $\tilde{t} \in (0,1]$. Wähle eine Kugel $B = B_\rho(\tilde{x})$ mit Radius $\rho > 0$ so, dass $\overline{B_\rho(\tilde{x})} \subset \Omega$ sowie $x_0 \notin \overline{B_\rho(\tilde{x})}$. Dann $\exists x_2 \in \partial B : u(x_2) > a$. Da u superharmonisch ist, gilt $a = u(\tilde{x}) \geq M_\rho(\tilde{x},u)$. Weiter folgt wegen $a = \min_\Omega u$ und der Stetigkeit von u: $a \geq M_\rho(\tilde{x},u) > a$ ↯.

(b) $\min_{\overline{\Omega}} u \leq \min_{\partial\Omega} u$ gilt für jedes $u \in C(\overline{\Omega})$. Wegen (a) gilt: $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega}$. Aus $u_{|\partial\Omega} \geq a$ folgt damit, dass $u \geq a$ in Ω gilt. Gleichheit ist erneut wegen (a) nur möglich, wenn $u \equiv a$.

□

Bemerkungen

(a) u harmonisch in $\Omega \Rightarrow u$ ist super- und subharmonisch.

(b) u superharmonisch in $\Omega \Leftrightarrow -u$ subharmonisch in Ω.

(c) u, v superharmonisch in $\Omega \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda u, \lambda \geq 0 \\ u + v \\ \min u, v \end{cases}$ sind superharmonisch.

($\tilde{c}$) u, v subharmonisch in $\Omega \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda u, \lambda \geq 0 \\ u + v \\ \max u, v \end{cases}$ sind subharmonisch.

Definition 3.32
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $D \subset \Omega$. Man sagt, D liegt echt in Ω, wenn $\overline{D} \subset \Omega$ gilt.

Satz 3.33 (Charakterisierung superharmonischer Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *u ist superharmonisch.*

(b) *Für jede echt in Ω gelegene Kugel $B_R(x_0)$ gilt: $u(x_0) \geq m_R(x_0, u)$.*

(c) *bzw. ($\tilde{c}$) Für jedes $x_0 \in \Omega$ existiert $\rho = \rho(x_0) > 0$ mit $B_\rho(x_0) \subset \Omega$ derart, dass*

$$\begin{aligned} u(x_0) &\geq m_R(x_0, u) \quad \forall R \in (0, \rho) \qquad (c) \\ u(x_0) &\geq M_R(x_0, u) \quad \forall R \in (0, \rho) \qquad (\tilde{c}). \end{aligned}$$

(d) *Für jede echt in Ω gelegene offene Kugel B gilt:*
Ist h stetig auf $\overline{B}$ und harmonisch in B mit $u \geq h$ auf ∂B, so folgt $u \geq h$ in B.

(e) *Für jedes echt in Ω gelegene beschränkte Gebiet D gilt:*
Ist h stetig auf $\overline{D}$, harmonisch in D mit $u \geq h$ auf ∂D, so folgt $u \geq h$ in D.

Beweis. Wir zeigen:

$$\begin{array}{ccccccc} {}^{(c)}_{(\tilde{c})} \Longrightarrow (e) & \overset{\text{triv.}}{\Longrightarrow} (d) \Longrightarrow & (b) & \overset{\text{Integration}}{\Longrightarrow} & (a) & \overset{\text{triv.}}{\Longrightarrow} & (\tilde{c}) \\ & & \Downarrow \text{triv.} & & & & \\ & & (c) & & & & \end{array}$$

Zunächst stellen wir fest, dass die Implikationen $(e) \Rightarrow (d)$, $(a) \Rightarrow (\tilde{c})$ ebenso wie $(b) \Rightarrow (c)$ trivial sind.

$(b) \Rightarrow (a):$ Aus dem Cavalieri-Prinzip folgt zunächst:

$$M_R(x_0,u) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)\,dx$$

$$= \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_0^R \left(\oint\limits_{\partial B_\rho(x_0)} u(x)\,d\sigma \right) d\rho$$

$$= \frac{n}{R^n} \int\limits_0^R \rho^{n-1} m_\rho(x_0,u)\,d\rho.$$

Aus $m_\rho(x_0,u) \le u(x_0) \quad \forall \rho \in (0,R]$ folgt mit obiger Rechnung

$$M_R(x_0,u) \le \frac{n}{R^n} \int\limits_0^R \rho^{n-1} u(x_0)\,d\rho = u(x_0).$$

$(c), (\tilde{c}) \Rightarrow (e):$ Sei $h : D \to \mathbb{R}$ harmonisch, stetig auf $\overline{D}$.

Setze $w := u - h : \overline{D} \to \mathbb{R}$. Es gilt $w \ge 0$ auf ∂D. Sei w nicht konstant (ansonsten ist Behauptung richtig). Angenommen w nimmt sein Minimum in $x_1 \in D$ an, d.h. $w(x_1) = \min_{\overline{D}} w = a$. Da w nicht konstant ist, existiert ein $x_0 \in D : w(x_0) > a$. Verbinde x_0, x_1 durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$, mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Sei $\tilde{x}$ der erste Punkt auf γ mit $a = w(\tilde{x})$. Dann gilt für hinreichend kleinen Radius $\tilde{\rho} > 0$:

$$a = w(\tilde{x}) = u(\tilde{x}) - h(\tilde{x}) \underset{(\tilde{c})}{\overset{(c)}{\ge}} \left\{ \begin{matrix} m_{\tilde{\rho}}(\tilde{x},u) - m_{\tilde{\rho}}(\tilde{x},h) = m_{\tilde{\rho}}(\tilde{x},w) \\ M_{\tilde{\rho}}(\tilde{x},u) - M_{\tilde{\rho}}(\tilde{x},h) = M_{\tilde{\rho}}(\tilde{x},w) \end{matrix} \right\} > a \qquad ↯.$$

Folglich nimmt w sein Minimum nicht in D sondern auf ∂D an, d.h.:

$$\min_{\overline{D}} w = \min_{\partial D} w \ge 0$$

und somit $w \ge 0$ in D, d.h. $u \ge h$ in D.

$(d) \Rightarrow (b):$ Sei $B_R(x_0)$ echt in Ω gelegen.

In $B_R(x_0)$ setze $h := P_{B_R(x_0)} u =$ Poisson-Integral von $u_{|\partial B_R(x_0)}$ und auf $\partial B_R(x_0)$ setze $h := u$.

Dann ist h harmonisch in $B_R(x_0)$ und stetig auf $\overline{B_R(x_0)}$. Mit (d) gilt: $u \ge h$ in $B_R(x_0)$ und damit

$$u(x_0) \ge h(x_0) = m_R(x_0,h) = m_R(x_0,u) \qquad \Rightarrow \text{ (b).}$$

$\square$

Satz 3.34 (Umkehrung des Gaußschen Mittelwertsatzes)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Falls für alle $x_0 \in \Omega$ ein $\rho = \rho(x_0) > 0$ existiert mit $B_\rho(x_0) \subset \Omega$ und

$$u(x_0) = M_R(x_0,u) \quad \forall R \in (0,\rho), \text{ oder}$$
$$u(x_0) = m_R(x_0,u) \quad \forall R \in (0,\rho),$$

dann ist u harmonisch in Ω, insbesondere ist $u \in C^2(\Omega)$.

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ und $0 < R < \rho(x_0)$, d.h. $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$.

Es bezeichne $P_{B_R(x_0)}u$ das Poisson-Integral von $u_{|\partial B_R(x_0)}$ für die Kugel $B_R(x_0)$.

Es genügt zu zeigen, dass $u = P_{B_R(x_0)}u$ gilt.

Setze $h = P_{B_R(x_0)}u$ in $B_R(x_0)$ und $h := u$ auf $\partial B_R(x_0)$. Nach Satz 3.33 (c) sind u und $-u$ superharmonisch in Ω. Weil $u = h$ auf $\partial B_R(x_0)$ folgt mit Satz 3.33 (e) $u \geq h$ und $-u \geq -h$ in $B_R(x_0)$, also $u = h$ in $B_R(x_0)$. □

Folgerung aus Satz 3.34: u harmonisch $\Leftrightarrow$ u sub- und superharmonisch.

Satz 3.35 (Konvergenzsatz von Weierstraß)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C(\overline{\Omega})$ von Funktionen, die in Ω harmonisch sind. Falls $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\partial\Omega$ konvergiert, dann konvergiert $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$ gegen $u \in C(\overline{\Omega})$ und u ist harmonisch in Ω.

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $k_0 = k_0(\varepsilon)$ mit

$$\forall k, \ell \geq k_0 : \qquad -\varepsilon \leq \underbrace{u_k(x) - u_\ell(x)}_{\text{harm.}} \leq \varepsilon \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

Mit dem Maximum-Minimumprinzip (Korollar 3.11) folgt

$$\forall k, \ell \geq k_0 : \qquad -\varepsilon \leq u_k(x) - u_\ell(x) \leq \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

D.h. $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge bezüglich gleichmäßiger Konvergenz in $\overline{\Omega}$ und deshalb konvergiert u_k für $k \to \infty$ gleichmässig auf $\overline{\Omega}$ gegen eine Grenzfunktion $u \in C(\overline{\Omega})$.

Noch zu zeigen: u ist harmonisch in Ω. Dazu sei $B_R(x_0)$ eine echt in Ω gelegene Kugel. Dann gilt

$$u(x_0) = \lim_{k\to\infty} u_k(x_0) \underset{\text{harm.}}{\overset{u_k}{=}} \lim_{k\to\infty} m_R(x_0, u_k) \overset{(*)}{=} m_R(x_0, \lim_{k\to\infty} u_k) = m_R(x_0, u)$$

Zu $(*)$: vergleiche hierzu das Handout zur Vertauschung von Grenzübergängen A.3.

Mit Satz 3.34 folgt, dass u harmonisch in Ω ist. □

3.6 Lösung des Dirichlet-Problems mit der Methode von Perron

Oskar Perron (1880-1975), Professor in Heidelberg und München.

$$\text{Problem } (P) \quad \begin{cases} \text{gegeben:} & \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ beschränktes Gebiet}, f \in C(\partial\Omega) \\ \text{gesucht:} & u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ mit} \\ & \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \end{cases}$$

Definition 3.36 (Unterfunktion, Oberfunktion)
Seien $v, w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig.

$$\left\{ \begin{matrix} v \\ w \end{matrix} \right\} \textit{ heißt } \left\{ \begin{matrix} \textit{Unterfunktion} \\ \textit{Oberfunktion} \end{matrix} \right\} \textit{ zu } (P) \textit{, falls gilt:}$$

$$\left\{ \begin{matrix} v \\ w \end{matrix} \right\} \textit{ ist } \left\{ \begin{matrix} \textit{subharmonisch} \\ \textit{superharmonisch} \end{matrix} \right\} \textit{ in } \Omega \textit{ und } \left\{ \begin{matrix} v \leq f \\ w \geq f \end{matrix} \right\} \textit{ auf } \partial\Omega.$$

Setze

$$\mathcal{V} := \text{Menge aller Unterfunktionen zu (P)},$$
$$\mathcal{W} := \text{Menge aller Oberfunktionen zu (P)}.$$

Frage: Gilt $\mathcal{V} \neq \emptyset, \mathcal{W} \neq \emptyset$?

Antwort: ja. Wähle v, w als auf $\overline{\Omega}$ konstante Funktionen wie folgt:

$$v := \min_{\partial\Omega} f, \quad w := \max_{\partial\Omega} f.$$

Dann ist $v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}$, d.h. $\mathcal{V} \neq \emptyset, \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Bemerkungen

i) $v_1, v_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow \max\{v_1, v_2\} \in \mathcal{V}$,

ii) $w_1, w_2 \in \mathcal{W} \Rightarrow \min\{w_1, w_2\} \in \mathcal{W}$,

iii) $v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}$. Dann ist $w - v$ superharmonisch in Ω, und $w - v \geq 0$ auf $\partial\Omega$. Mit dem Minimumsprinzip für superharmonische Funktionen (Satz 3.31) gilt:

$$w - v \geq 0 \text{ in } \overline{\Omega}, \text{ d.h. } v \leq w \text{ in } \overline{\Omega}.$$

Satz 3.37
Für $x \in \overline{\Omega}$ sei

$$u(x) := \inf\{w(x) : w \in \mathcal{W}\}. \tag{$\star$}$$

Dann ist u harmonisch in Ω. u heißt Perron-Lösung von (P).

Beachte: Noch gibt es keine Aussage über

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \in \partial\Omega \\ x \in \Omega}} u(x) = f(x_0),$$

d.h. die stetige Annahme der vorgegebenen Randwerte f ist bisher nicht Bestandteil des Satzes.

Bemerkung Angenommen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ löst (P). Dann ist $u \in \mathcal{W} \cap \mathcal{V}$. Für beliebiges $w \in \mathcal{W}$ gilt daher $u \leq w$ in $\overline{\Omega}$. D.h. u hat notwendigerweise die Gestalt ($\star$), die im Satz 3.37 angegeben wird.

Definition 3.38 (Harmonische Hebung, harmonic lift)
Sei B eine echt in Ω gelegene Kugel und $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Die Funktion $P_B\,\varphi$ definiert durch

$$(P_B\,\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \overline{\Omega} \setminus B \\ \underbrace{\oint_{\partial B} P(x,y)\varphi(y)\, d\sigma_y}_{\text{Poisson-Integral von } \varphi_{|\partial B}}, & x \in B \end{cases}$$

heisst harmonische Hebung von φ. Wegen den Eigenschaften des Poisson-Integrals gilt $P_B\varphi \in C(\overline{\Omega})$.

Satz 3.39 (Eigenschaften von P_B)
Sei B eine echt in Ω gelegene offene Kugel.

(a) $w \in \mathcal{W} \Rightarrow P_B w \in \mathcal{W}$ *und* $P_B w \leq w$ *in* Ω.

(b) $v \in \mathcal{V} \Rightarrow P_B v \in \mathcal{V}$ *und* $P_B v \geq v$ *in* Ω.

Beweis. (a) In B gilt: $P_B w$ harmonisch und $P_B w = w$ auf ∂B.

Mit Satz 3.33 (d) folgt $P_B w \leq w$ in $\overline{B}$. Da $P_B w = w$ in $\overline{\Omega} \setminus B$ folgt $P_B w \leq w$ in $\overline{\Omega}$.

Nun zeigen wir noch, dass $P_B w$ superharmonisch in Ω ist. Mit Satz 3.33 (c) genügt es zu zeigen, dass für alle $x_0 \in \Omega$ ein $\rho = \rho(x_0)$ existiert mit:

$$(P_B w)(x_0) \geq m_R(x_0, P_B w) \quad \forall R \in (0, \rho). \tag{$*$}$$

Es sind zwei Fälle möglich:

i) $x_0 \in B$. Setze $\rho := \operatorname{dist}(x_0, \partial B) > 0$. Dann gilt Aussage ($*$) mit „=“, da $P_B w$ innerhalb B eine harmonische Funktion ist.

ii) $x_0 \in \Omega \setminus B$. Wähle $\rho := \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Für $0 < R < \rho$ gilt dann

$$(P_B w)(x_0) = w(x_0) \geq m_R(x_0, w) \overset{w \geq P_B w}{\geq} m_R(x_0, P_B w).$$

(b) Analog.

□

Beweis von Satz 3.37. Sei $w_0 := \|f\|_\infty$. Dann gilt $w_0 \in \mathcal{W}$, $-w_0 \in \mathcal{V}$ und $\min\{w, w_0\} \in \mathcal{W}$ für alle $w \in \mathcal{W}$. Desweiteren wissen wir bereits: für alle $w \in \mathcal{W}$ gilt $P_B w \in \mathcal{W}$ und $P_B w \leq w$. Deshalb können wir feststellen:

$$\begin{aligned}
\inf\{w(x) : w \in \mathcal{W}\} = {} & \inf\{w(x) : w \in \mathcal{W}, w \leq w_0\} \\
\overset{P_B w \leq w}{\geq} {} & \inf\{(P_B w)(x) : w \in \mathcal{W}, w \leq w_0\} \\
\overset{P_B w \in \mathcal{W}}{\geq} {} & \inf\{w(x) : w \in \mathcal{W}\}
\end{aligned}$$

und folglich gilt überall in dieser Ungleichheitskette die Gleichheit. Definieren wir also

$$\mathcal{H} := \{P_B w : w \in \mathcal{W}, w \leq w_0\}$$

so gilt für die in Satz 3.37 definierte Funktion u:

$$u(x) = \inf\{z(x) : z \in \mathcal{H}\}.$$

(a) Um die Stetigkeit von u in Ω zu zeigen, betrachten wir eine echt in Ω gelegene offene Kugel B und zeigen die Stetigkeit von u in B. Für $w \in \mathcal{W}$ gilt wegen $-w_0 \in \mathcal{V}$ die Ungleichung $w \geq -w_0$ und demzufolge $P_B w \geq P_B(-w_0) = -w_0$. D.h. für alle $z \in \mathcal{H}$ gilt $\|z\|_\infty \leq w_0$. Für jede Kugel B_1 mit $\overline{B_1} \subset B$ existiert wegen den Cauchy-Abschätzungen von Satz 3.27 eine Konstante $C = C(B, B_1)$ mit:

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{\infty, \overline{B_1}} \leq C \quad \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall z \in \mathcal{H}.$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} &|z(x) - z(y)| \leq C|x-y| && \forall x, y \in \overline{B_1},\ \forall z \in \mathcal{H} \\ &\Rightarrow z(x) \leq z(y) + C|x-y| && \forall x, y, \in \overline{B_1},\ \forall z \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Da $u(x) = \inf_{z\in\mathcal{H}} z(x)$ folgt

$$\begin{aligned} &u(x) \leq u(y) + C|x-y| && \forall x, y, \in \overline{B_1} \\ &\Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq C|x-y| && \forall x, y, \in \overline{B_1} \\ &\Rightarrow u \text{ Lipschitz-stetig in } \overline{B_1}. \end{aligned}$$

Da $\overline{B_1} \subset B$ beliebig war, folgt u stetig in B.

(b) Nun zeigen wir, dass u harmonisch in Ω ist. Sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Für jeden Punkt $a \in \Omega$ existiert ein $w_a \in \mathcal{W}$ mit $u(a) \leq w_a(a) \leq u(a)+\varepsilon$. Wegen der Stetigkeit von u, w_a existiert eine offene Kugel $B(a) \subset \Omega$ mit

$$u(x) \leq w_a(x) \leq u(x) + 2\varepsilon, \quad \forall x \in B(a). \tag{$\oplus$}$$

Ist B eine offene Kugel mit $\overline{B} \subset \Omega$ dann gilt $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{a\in\overline{B}} B(a)$. Nach dem Satz von Heine-Borel gilt weiter:

$$\exists a_1, \ldots, a_p \in \overline{B} \text{ mit } \overline{B} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(a_i).$$

Setze

$$w(x) := \min\{w_{a_i}(x) : i = 1, \ldots, p\}, x \in \overline{\Omega}.$$

Dann ist $w \in \mathcal{W}$ und für dieses w gilt wegen ($\oplus$)

$$u(x) \leq w(x) \leq u(x) + 2\varepsilon \quad \forall x \in \overline{B}.$$

Setze $z := P_B w$. Dann ist $z \in \mathcal{W}$, $z \leq w$ und es folgt

$$u(x) \leq z(x) \leq u(x) + 2\varepsilon \quad \forall x \in \overline{B}.$$

Wir haben also zu $\varepsilon > 0$ eine in $\overline{B}$ stetige und in B harmonische Funktion z gefunden mit $\|u - z\|_{\infty,\overline{B}} \leq 2\varepsilon$.

Setze nun $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Folge von in $\overline{B}$ stetigen und in B harmonischen Funktionen, dann konvergiert $z_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ gleichmäßig auf $\overline{B}$. Mit dem Konvergenzsatz von Weierstraß folgt: u ist harmonisch in B.

□

Frage: Falls $x_0 \in \partial\Omega$, gilt dann

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\Omega}} u(x) = f(x_0) \quad ?$$

Antwort: Im Allgemeinen nicht.

Beispiel (genauer: Gegenbeispiel)

Sei $n \geq 2$, $\quad \Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $\partial\Omega = \partial B_1(0) \cup \{0\}$. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$f : \begin{cases} \partial\Omega \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & |x| = 1 \\ a, & x = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{$*$}$$

Die zugehörige Perron-Lösung ist [Übung!]

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Also ist $u \notin C(\overline{\Omega})$ und löst demnach nicht das Dirichlet-Problem.

Bemerkung Für $n \geq 2$ und Ω, f wie im obigen Beispiel gibt es keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{für } f \text{ wie in } (*).$$

Beweis der Bemerkung. Angenommen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ist Lösung. O.B.d.A. sei $a > 0$. Dann gilt mit Maximum-Minimum-Prinzip Satz 3.10:

$$0 \leq u(x) \leq a \quad \forall x \in \overline{\Omega} = \overline{B_1(0)}.$$

u ist beschränkt in $B_1(0)$, harmonisch in $B_1(0) \setminus \{0\}$. Vgl. Übung:

In $x = 0$ liegt eine hebbare Singularität vor, d.h. u hat harmonische Fortsetzung U auf $B_1(0)$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U &= 0 & &\text{in } B_1(0) \\ U = u &= 0 & &\text{auf } \partial B_1(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow U \equiv 0$$

und damit $u \equiv 0$ auf $B_1(0)$, somit $u(0) \neq a$. $\lightning$ □

Erläuterung zu hebbaren Singularitäten für $n \geq 2$: falls

$$\lim_{x \to P} \frac{u(x)}{\gamma(x - P)} = 0$$

gilt, dann hat u im Punkt P eine hebbare Singularität. Für $n \geq 2$ gilt:

$$\lim_{x \to P} \gamma(x - P) = \infty$$

d.h. im Punkt P liegt immer dann eine hebbare Singularität vor, wenn u in einer Umgebung von P beschränkt ist. Dies ist in der vorherigen Situation der Fall.

Betrachten wir nun den Fall $n = 1$ im obigen Beispiel: hier ist $\Omega = (-1, 0) \cup (0, 1)$. Die Funktion $u(x) = a(1 - |x|)$ erfüllt $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $u'' = 0$ in Ω, $u(-1) = u(1) = 0, u(0) = a$. Also ist u die Lösung des Dirichlet-Problems in diesem Fall. Beachte: in $n = 1$ ist Ω nicht zusammenhängend, in $n \geq 2$ schon.

Definition 3.40 (Regulärer Randpunkt)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Ein Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ heißt regulärer Randpunkt, falls für alle $f \in C(\partial\Omega)$ und für die zugehörige Perron-Lösung u gilt:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = f(x_0).$$

Definition 3.41 (Äußere Kugelbedingung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ω erfüllt in einem Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ die äußere Kugelbedingung, falls eine offene Kugel B existiert mit:

$$B \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \quad \textit{und } \overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}.$$

Satz 3.42
Falls Ω im Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ die äußere Kugelbedingung erfüllt, so ist x_0 ein regulärer Randpunkt.

Beweis. Sei $B = B_r(x_1)$. Definiere die Abbildung

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{x_1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g_0(r) - \gamma(x - x_1). \end{cases}$$

Erinnerung:

$$g_0(r) = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi} \log r, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$
$$\gamma(x) = g_0(|x|).$$

Die Funktion h ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1\}$; also inbesondere in Ω. Ausserdem ist $h > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$, $h(x_0) = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon, \qquad \text{falls } x \in \partial\Omega, |x - x_0| < \delta.$$

Falls $x \in \overline{\Omega}, |x - x_0| \geq \delta$, gilt: $h(x) \geq \beta$ für ein geeignetes $\beta > 0$.

Definiere für $A > 0$:

$$w : \begin{cases} \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x_0) + \varepsilon + A\, h(x) \end{cases}$$
$$v : \begin{cases} \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x_0) - \varepsilon - A\, h(x). \end{cases}$$

Die Funktionen v, w sind harmonisch in Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$.

Wähle A so groß, dass $\forall x \in \overline{\Omega}, |x - x_0| \geq \delta$ gilt:

$$Ah(x) \geq 2\|f\|_\infty, \qquad \text{z.B. } A \geq \frac{2\|f\|_\infty}{\beta}.$$

Dann gilt

$$w(x) \geq f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \qquad v(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

D.h. $w \in \mathcal{W}, v \in \mathcal{V}$. Für die Perron-Lösung u gilt daher

$$v(x) \leq u(x) \leq w(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

und damit

$$|u(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon + Ah(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Mit der Stetigkeit von h und $h(x_0) = 0$ folgt:

$$\overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}}} |u(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon + A \overbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} h(x)}^{=0} = \varepsilon.$$

$\square$

Bemerkung Ein Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ ist bereits dann regulär, wenn Ω in x_0 die äußere Kegelbedingung erfüllt, vgl. Übungen.

3.7 Dirichletsches Randwertproblem für die Poisson-Gleichung

$$\text{Problem (D):} \quad \begin{cases} \text{gegeben:} & \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ beschränktes Gebiet,} \\ & f \in C(\partial\Omega), g \in C(\Omega) \\ \text{gesucht:} & u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ mit} \\ & \begin{cases} -\Delta u = g & \text{in } \Omega \\ \quad u = f & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \end{cases}$$

Satz 3.43
Das Problem (D) besitzt höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Beweis. $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ seien zwei Lösungen. Setze $u := u_1 - u_2$. Dann ist $\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = g - g = 0$, d.h. u ist harmonisch in Ω. Auf $\partial\Omega$ gilt $u = 0$. Mit Satz 3.10 folgt $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$. □

Beispiel $g \equiv 1$.

$$\begin{array}{ll} \text{gegeben:} & f \in C(\partial\Omega) \\ \text{gesucht:} & u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ mit} \\ & \begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ \quad u = f & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \end{array}$$

Betrachte die Funktion

$$u_0(x) = \frac{-|x|^2}{2n} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Für sie gilt

$$\nabla u_0(x) = -\frac{x}{n}, \quad \Delta u_0(x) = -1.$$

Setze $\tilde{u} := u - u_0$. Damit u das Problem (D) löst, muss also $\tilde{u}$ eine Lösung des folgenden Problems sein:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \tilde{u}(x) = f(x) + \dfrac{|x|^2}{2n} & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Die Lösung $\tilde{u}$ für dieses Problem kann man mit der Methode von Perron finden, und $u := \tilde{u} + u_0$ löst dann (D).

Frage: Wenn nun ein beliebiges $g \in C(\Omega)$ gegeben ist, wie findet man dann u_0 mit $-\Delta u_0 = g$?

Definition 3.44 (Newtonsches Potential)
Sei $g \in L^\infty(\Omega)$. Dann heißt

$$N_g(x) = \int_\Omega \gamma(x-y) \cdot g(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Newtonsches Potential von g.

Satz 3.45
Für $g \in L^\infty(\Omega)$ gilt:

(a) $N_g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ *und* $\Delta N_g = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

(b) $N_g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $\dfrac{\partial N_g}{\partial x_i}(x) = \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\gamma(x-y) \cdot g(y)\, dy$ *für* $i = 1, \dots, n$.

Beweis.

(a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ und $\rho > 0$ so klein, dass $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ für $B = B_\rho(x_0)$. Dann existieren $R_1, R_2 > 0$ mit

$$0 < R_1 \le |x-y| \le R_2 \ \forall x \in \overline{B},\ \forall y \in \overline{\Omega}.$$

Für jeden Multi-Index α existiert eine Konstante C_α mit:

$$\begin{array}{ll} |D_x^\alpha \gamma(x-y)| \le C_\alpha & \forall x \in \overline{B},\ \forall y \in \overline{\Omega}, \\ \overline{\Omega} \ni y \mapsto D_x^\alpha \gamma(x-y) g(y) & \text{messbar } \forall x \in \overline{B}, \\ \overline{B} \ni x \mapsto D_x^\alpha \gamma(x-y) g(y) & \text{stetig für fast alle } y \in \overline{\Omega}. \end{array}$$

Mit den Sätzen aus dem Handout A.3 folgt:

$$N_g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \quad \text{und} \quad \forall x \in B : D^\alpha N_g(x) = \int_\Omega D_x^\alpha \gamma(x-y) g(y)\, dy.$$

Insbesondere gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$

$$\Delta N_g(x) = \int_\Omega \Delta_x \gamma(x-y) g(y)\, dy = 0.$$

(b) i) Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir zeigen zuerst, dass $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (also auch für $x \in \overline{\Omega}$) die Integrale

$$N_g(x) \text{ und } v(x) := \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\gamma(x-y) g(y)\, dy$$

existieren.

Lemma:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $h : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ messbar mit

$$|h(x,y)| \le C\, |x-y|^s, \quad s > -n.$$

Dann existiert

$$\int_\Omega h(x,y)\, dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis des Lemma. O.B.d.A. $s < 0$. Es gilt

$$\int_\Omega |h(x,y)|\, dy \le \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} \underbrace{|h(x,y)|}_{\le C\varepsilon^s}\, dy + \underbrace{\int_{B_\varepsilon(x)} |h(x,y)|\, dy,}_{<\infty}$$

denn

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon(x)} |x-y|^s \, dy &= \int_0^\varepsilon \Bigg(\oint_{\partial B_\rho(x)} \underbrace{|x-y|^s}_{\rho^s} \, d\sigma_y \Bigg) \, d\rho \\
= \int_0^\varepsilon \omega_n \rho^{n-1} \rho^s \, d\rho &= \frac{\omega_n}{n+s} \varepsilon^{n+s} < \infty, \qquad \text{da } n+s>0.
\end{aligned}$$

□

Das Lemma ist für $n \geq 3$ auf N_g und für $n \geq 2$ auf v anwendbar, denn

$$\begin{aligned}
|\gamma(x-y)| \; &\leq C\, |x-y|^{2-n} \qquad \text{für } n \geq 3 \\
\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma(x-y) \right| \; &\leq \; C |x-y|^{1-n} \qquad \text{für } n \geq 2
\end{aligned}$$

Für $n = 2$ ist $|\gamma(x-y)| \leq C \big| \log|x-y| \big|$ und in diesem Fall funktioniert ein ähnlicher Beweis wie im Lemma.

ii) Für $x \in \mathbb{R}^n$ definiere

$$N_g^\varepsilon(x) := \int_\Omega \gamma(x-y) \eta_\varepsilon(|x-y|) \, g(y) \, dy$$

mit

$$\eta_\varepsilon : \begin{cases} [0,\infty) \to [0,1] \\ \qquad t \to \eta(\frac{t}{\varepsilon}), \end{cases}$$

wobei $\eta : [0,\infty) \to [0,1]$ eine C^1-Funktion sei mit

$$\begin{cases} \eta(t) = 0, & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ \eta(t) = 1, & \text{für } t \geq 2, \\ |\eta'(t)| \leq 2 & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Es gilt $N_g^\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$, vgl. Handout A.3.
Wir zeigen, dass gilt:

$$\begin{aligned}
N_g^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} N_g \qquad & \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n, \\
\frac{\partial N_g^\varepsilon}{\partial x_i} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} v \qquad & \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

woraus (wie in Ana I bzw. vgl. Handout A.3) folgt: $N_g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\frac{\partial N_g}{\partial x_i} = v$. Damit ist dann der Beweis der Behauptung (b) beendet.

Zunächst schätzen wir für $x \in \mathbb{R}^n$ ab:

$$
\begin{aligned}
|N_g(x) - N_g^\varepsilon(x)| &\le \int\limits_\Omega \underbrace{\big(1 - \eta_\varepsilon(|x-y|)\big)}_{=0 \text{ falls } |x-y| \ge 2\varepsilon} |\gamma(x-y)||g(y)|\, dy \\
&\le \|g\|_\infty \int\limits_{B_{2\varepsilon}(x)} |\gamma(x-y)|\, dy \\
&= \omega_n \|g\|_\infty \int\limits_0^{2\varepsilon} |g_0(\rho)|\rho^{n-1}\, d\rho \\
&= \|g\|_\infty \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{2\varepsilon^2}{n-2}, & \text{für } n \ge 3 \\ \dfrac{\varepsilon^2}{4}(1 - \log\varepsilon), & \text{für } n = 2 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \text{ gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| v(x) - \frac{\partial N_g^\varepsilon}{\partial x_i}(x) \right| &\le \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_i}\big(1 - \eta_\varepsilon(|x-y|)\big)\gamma(x-y)\, g(y) \right| dy \\
&\overset{\text{Produktregel}}{\le} \|g\|_\infty \int\limits_{B_{2\varepsilon}(x)} \frac{2}{\varepsilon}|\gamma(x-y)| + \overbrace{\left| \frac{\partial}{\partial x_i}\gamma(x-y) \right|}^{\le \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{1-n}} dy \\
&\le \|g\|_\infty \begin{Bmatrix} \dfrac{4\varepsilon}{n-2} + 2\varepsilon, & \text{für } n \ge 3 \\ \dfrac{\varepsilon}{2}(1 - \log\varepsilon) + 2\varepsilon, & \text{für } n = 2 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \text{ gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.46
Sei $w := N_1$ auf $B_R(0)$. Dann ist $w \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \partial B_R(0))$ und

$$
\Delta w = \begin{cases} -1 & \text{in } B_R(0) \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)} \end{cases}
$$

Beweis.

$$
w(x) = \int\limits_{B_R(0)} \gamma(x-y)\, dy = \int\limits_0^R \Bigg(\oint\limits_{\partial B_\rho(0)} \gamma(x-y)\, d\sigma_y \Bigg) d\rho.
$$

Definiere für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\rho > 0$

$$
J(x,\rho) := \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \oint\limits_{\partial B_\rho(0)} \gamma(x-y)\, d\sigma_y = m_\rho(0, \gamma(x - \cdot)).
$$

Es gilt:

i) $x \mapsto J(x,\rho)$ ist $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \partial B_\rho(0))$ und harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \partial B_\rho(0)$.

ii) J ist radialsymmetrisch, d.h. für jede orthogonale Matrix A gilt $J(Ax,\rho) = J(x,\rho)$, denn

$$\begin{aligned} J(Ax,\rho) &= \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \oint\limits_{\partial B_\rho(0)} \gamma(Ax-y)\, d\sigma_y \\ &\overset{y=Az}{=} \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \oint\limits_{\partial B_\rho(0)} \underbrace{\gamma(Ax-Az)}_{=\gamma(x-z)}\, d\sigma_z = J(x,\rho). \end{aligned}$$

Mit Korollar 3.4 folgt

$$J(x,\rho) = \begin{cases} a + b\, g_0(|x|), & |x| < \rho \\ c + d\, g_0(|x|), & |x| > \rho \end{cases} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Da $J(0,\rho) \in \mathbb{R}$ ein endlicher Wert ist, g_0 aber in $x = 0$ eine Singularität besitzt, muss $b = 0$ sein. Setzt man zudem $x = 0$ in die Definition von $J(x,\rho)$ so erhält man $a = g_0(\rho)$.

Im Fall $|x| > \rho$ ist $\gamma(x - \cdot)$ harmonisch in $B_\rho(0)$ und stetig in $\overline{B_\rho(0)}$. Folglich ist aufgrund des Gausschen Mittelwertsatzes 3.8

$$J(x,\rho) = \underbrace{\gamma(x)}_{=g_0(|x|)}$$

und demnach $c = 0, d = 1$. Nun können wir die radialsymmetrische Funktion w berechnen. Sei dazu $w(x) = \tilde{w}(r)$ mit $r = |x|$. Dann gilt:

$$\tilde{w}(r) = \omega_n \int\limits_0^R \rho^{n-1} J(x,\rho)\, d\rho.$$

1. Fall: $r = |x| > R$. Dann ist

$$\tilde{w}(r) = \omega_n \int\limits_0^R g_0(r)\rho^{n-1}\, d\rho = \frac{\omega_n}{n}\, g_0(r)\, R^n.$$

2. Fall: $r = |x| < R$. Dann ist

$$\tilde{w}(r) = \omega_n \int\limits_0^{|x|} \rho^{n-1} g_0(r)\, d\rho + \omega_n \int\limits_{|x|}^R \rho^{n-1} g_0(\rho)\, d\rho.$$

Mit diesen beiden Darstellungen berechen wir nun

$$\Delta w(x) = \tilde{w}''(r) + \frac{n-1}{r}\tilde{w}'(r)$$

$$\tilde{w}'(r) = \begin{cases} \dfrac{\omega_n}{n}\, g_0'(r)\, R^n, & r > R \\ \omega_n g_0'(r) \displaystyle\int_0^r \rho^{n-1}\, d\rho = \dfrac{\omega_n}{n}\, g_0'(r)\, r^n, & r < R \end{cases}$$

$$w''(r) = \begin{cases} \dfrac{\omega_n}{n}\, g_0''(r)\, R^n, & r > R \\ \dfrac{\omega_n}{n}\, g_0''(r)\, r^n + \underbrace{\omega_n g_0'(r)\, r^{n-1}}_{=-1}, & r < R \end{cases}$$

$$\Delta w(x) = \begin{cases} 0, & |x| > R \\ -1, & |x| < R \end{cases}$$

□

Satz 3.47
Es gilt $N_1 \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega)$ *und*

$$-\Delta N_1 = \begin{cases} 1 \text{ in } \Omega, \\ 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Erinnerung: Ist $n = 3$ und $\Omega = B_R(\bar{x})$ und N_1 das Newton-Potential mit Dichte 1 auf der Menge $B_R(\bar{x})$, so folgt aus dem bereits bewiesenen Lemma 3.46:

$$\begin{aligned} |x-\bar{x}| > R: \quad & N_1(x) = \frac{R^3}{3}\frac{1}{|x-\bar{x}|}, \\ & \nabla N_1(x) = \frac{R^3}{3|x-\bar{x}|^3}(\bar{x}-x), \\ & \Delta N_1(x) = 0. \\ |x-\bar{x}| < R: \quad & N_1(x) = \frac{|x-\bar{x}|^2}{3} + \int\limits_{|x-\bar{x}|}^{R} \rho \, d\rho = \frac{R^2}{2} - \frac{|x-\bar{x}|^2}{6}, \\ & \nabla N_1(x) = \frac{\bar{x}-x}{3}, \\ & \Delta N_1(x) = -1. \end{aligned}$$

Man sieht, dass N_1 zu $C^1(\mathbb{R}^3)$ gehört und dass die zweiten Ableitungen von N_1 am Rand von $B_R(\bar{x})$ springen.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, dann gilt:

$$\Delta N_1(x) = \int\limits_\Omega \Delta_x \gamma(x-y)\, dy = 0.$$

Sei $\bar{x} \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset \Omega$. Für alle $x \in B_\varepsilon(\bar{x})$ gilt:

$$N_1(x) = \underbrace{\int\limits_{\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(\bar{x})}} \gamma(x-y)\, dy}_{=N_1 \text{ bzgl. } \Omega_\varepsilon = \Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(\bar{x})}} + \underbrace{\int\limits_{B_\varepsilon(\bar{x})} \gamma(x-y)\, dy}_{=N_1 \text{ bzgl. } B_\varepsilon(\bar{x})}.$$

Für N_1 bzgl. Ω_ε gilt $N_1 \in C^\infty(B_\varepsilon(\bar{x}))$ und N_1 harmonisch in $B_\varepsilon(\bar{x})$, denn $B_\varepsilon(\bar{x})$ ist disjunkt zu $\overline{\Omega_\varepsilon}$ (Satz 3.45(a)). Für N_1 bzgl. $B_\varepsilon(\bar{x})$ verwende Lemma 3.46. Damit folgt die Behauptung. □

Definition 3.48 (Hölderstetigkeit)
Sei $0 < \alpha \leq 1$. $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *heißt* $\alpha-$*Hölderstetig auf* Ω, *falls*

$$[g]_{\alpha,\Omega} := \sup\left\{\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} : x, y \in \Omega, x \neq y\right\} < \infty.$$

Satz 3.49
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *sei* $\alpha-$*Hölderstetig auf* Ω. *Dann ist* $N_g \in C^2(\Omega)$ *und*

$$\frac{\partial^2 N_g}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\gamma(x-y)\right)\big(g(y)-g(x)\big)\, dy + g(x)\frac{\partial^2 N_1}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad x \in \Omega$$

Insbesondere gilt für $x \in \Omega$: $-\Delta N_g(x) = g(x)$.

Beweis von Satz 3.49. Sei $\eta_\varepsilon : [0,\infty) \to [0,1]$ wie in Beweis von Satz 3.45 auf S. 48:

$$\eta_\varepsilon : \begin{cases} [0,\infty) \to [0,1] \\ \qquad t \to \eta(\frac{t}{\varepsilon}), \end{cases}, \quad \eta \text{ ist } C^1 \text{ mit } \begin{cases} \eta(t) = 0, & \text{für } 0 \le t \le 1, \\ \eta(t) = 1, & \text{für } t \ge 2, \\ |\eta'(t)| \le 2, & \text{für } t \ge 0. \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze:

$$v(x) := \frac{\partial N_g}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\gamma(x-y)g(y)\,dy,$$
$$v_\varepsilon(x) := \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma(x-y)\right)\eta_\varepsilon(|x-y|)\,g(y)\,dy.$$

Es gilt $v_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$, vgl. Handout A.3. Wie im Beweis von Satz 3.45 lässt sich zeigen, dass $v_\varepsilon \to v$ gleichmässig in $\mathbb{R}^n$ für $\varepsilon \to 0$. Verwende nun den Trick: $g(y) = g(y) - g(x) + g(x)$ in der folgenden Darstellung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma(x-y)\right)\eta_\varepsilon(|x-y|)\right)\,g(y)\,dy \\ &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma(x-y)\right)\eta_\varepsilon(|x-y|)\right)\,\big(g(y)-g(x)\big)\,dy \\ &\quad + g(x)\underbrace{\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma(x-y)\right)\eta_\varepsilon(|x-y|)\right)\,dy}_{=:I} \end{aligned}$$

Sei $\bar{x} \in \Omega$. Wähle $0 < \rho < \operatorname{dist}(\bar{x}, \partial\Omega)$ und $0 < 2\varepsilon < \operatorname{dist}(\bar{x}, \partial\Omega) - \rho$. Für $x \in B_\rho(\bar{x}), y \in \partial\Omega$ gilt dann $|x-y| > 2\varepsilon$. Mit dem Gaußschen Integralsatz (Satz G.2) gilt:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma(x-y)\right)\underbrace{\eta_\varepsilon(\overbrace{|x-y|}^{>2\varepsilon})}_{=1}\nu_i(y)d\sigma_y \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\oint_{\partial\Omega}\gamma(x-y)\nu_i(y)\,d\sigma_y \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\gamma(x-y)\,dy \\ &\overset{\text{Satz 3.45 b)}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}N_1(x). \end{aligned}$$

Setze nun für $x \in \mathbb{R}^n$

$$w(x) := \int_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\gamma(x-y)\right)\,\big(g(y)-g(x)\big)}_{(*)}\,dy + g(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}N_1(x).$$

Wir schätzen $(*)$ ab durch $|(*)| \le C|x-y|^{-n}\,|x-y|^\alpha\,[g]_{\alpha,\Omega}$. Folglich existiert $w(x)$ für alle $x \in \Omega$ wegen des Lemmas im Beweis von Satz 3.45.

Für $x \in B_\rho(\bar{x})$ gilt

$$w(x) - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int\limits_\Omega -\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma(x-y) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\varepsilon(|x-y|)}_{\neq 0 \text{ nur für } \varepsilon \le |x-y| \le 2\varepsilon} \Big)\big(g(y)-g(x)\big)\, dy$$
$$+ \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\gamma(x-y)\right) \underbrace{(1-\eta_\varepsilon(|x-y|))}_{\neq 0 \text{ nur für } |x-y| \le 2\varepsilon} \big(g(y)-g(x)\big)\, dy$$

Es gibt also geeignete Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned}
\left| w(x) - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(x)\right| &\le \frac{C_1}{\varepsilon} \int\limits_{\varepsilon \le |x-y| \le 2\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \underbrace{|g(y)-g(x)|}_{\le [g]_{\alpha,\Omega}|x-y|^\alpha}\, dy + C_2 \int\limits_{|x-y|\le 2\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^n} \underbrace{|g(y)-g(x)|}_{\le [g]_{\alpha,\Omega}|x-y|^\alpha}\, dy \\
&\le \int\limits_{|x-y|\le 2\varepsilon} \frac{C_1}{\varepsilon |x-y|^{n-1}} |x-y|^\alpha [g]_{\alpha,\Omega} + \frac{C_2}{|x-y|^n}|x-y|^\alpha [g]_{\alpha,\Omega}\, dy \\
&\le C\, [g]_{\alpha,\Omega} \int\limits_{|x-y|\le 2\varepsilon} \frac{|x-y|^{\alpha-n+1}}{\varepsilon} + |x-y|^{\alpha-n}\, dy \\
&= \omega_n\, C\, [g]_{\alpha,\Omega} \int\limits_0^{2\varepsilon} \frac{r^\alpha}{\varepsilon} + r^{\alpha-1}\, dr \\
&= \tilde{C}\, [g]_{\alpha,\Omega}\, \varepsilon^\alpha \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \text{ gleichmäßig auf } B_\rho(\bar{x}).
\end{aligned}$$

Also

$$\left.\begin{array}{ll} v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \dfrac{\partial N_g}{\partial x_j} & \text{glm. auf } \mathbb{R}^n \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} w & \text{glm. auf } B_\rho(\bar{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 N_g}{\partial x_i \partial x_j} \text{ existiert und es gilt } \frac{\partial^2 N_g}{\partial x_i \partial x_j} = w \text{ auf } \Omega.$$

Insbesondere gilt für $x \in B_\rho(\bar{x})$:

$$\Delta N_g(x) = g(x)\Delta N_1(x) = -g(x).$$

□

KAPITEL 4

Wärmeleitungsgleichung

Ziel: Untersuchung der Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \tag{1}$$

(homogene Wärmeleitungsgleichung)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \tag{2}$$

(inhomogene Wärmeleitungsgleichung)

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und

$$u : \begin{cases} \Omega \times (0,\infty) & \to \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto u(x,t). \end{cases}$$

Zur Notation: Im Folgenden bzw. in der Literatur wird statt Δ_x nur Δ geschrieben. Trotzdem bezieht sich der Laplace-Operator ausschließlich auf die Ortsvariablen.

4.1 Bestimmung der Fundamentallösung

Betrachte (1) für $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Lemma 4.1
Falls $u : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ Lösung von (1) ist, dann löst für jedes $\lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}$

$$u_{\lambda,\mu}(x,t) := \mu\, u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung (1).

Beweis. Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\, u_{\lambda,\mu}(x,t) &= \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)\cdot \lambda \\
\frac{\partial}{\partial x_i} u_{\lambda,\mu}(x,t) &= \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)\cdot \sqrt{\lambda} \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_{\lambda,\mu}(x,t) &= \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)\cdot \lambda \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u_{\lambda,\mu}(x,t) &= \mu\,\lambda \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right)}_{\equiv 0}(\sqrt{\lambda}x, \lambda t) = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow u_{\lambda,\mu}$ löst (1).

□

Fragen: Gibt es *selbstähnliche* Lösungen von (1), d.h. Lösungen u mit

$$u(x,t) = \lambda^{\alpha} u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t) \quad \forall \lambda > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t > 0\ ?$$

Wie findet man solche Lösungen?

Angenommen u ist selbstähnlich und erfüllt (1). Setze $v(y) := u(y,1)$. Dann gilt:

$$u(x,t) \overset{\lambda=\frac{1}{t}}{=} \frac{1}{t^{\alpha}}\, u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = \frac{1}{t^{\alpha}}\, v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Differentiation liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{t^{\alpha}}\,(\nabla v)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \frac{x}{t^{3/2}} \\
\Delta u(x,t) &= \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+1}(\Delta v)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

Da u die Gleichung (1) lösen soll, muss daher für v gelten (setze $y = x/\sqrt{t}$):

$$-t^{-\alpha-1}\left(\alpha\, v(y) + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v(y) + \Delta v(y)\right) = 0.$$

Versuch: v radialsymmetrisch.

$$\begin{aligned}
v(y) &= w(|y|), \quad w : [0,\infty) \to \mathbb{R} \\
\nabla v(y) &= w'(|y|)\frac{y}{|y|}, \\
\Delta v(y) &= w''(|y|) + \frac{n-1}{|y|} w'(|y|).
\end{aligned}$$

Für w muss dann gelten (setze $r = |y|$):

$$\underbrace{\alpha\, w(r) + \frac{1}{2} r w'(r)}_{=\frac{1}{2} r^{1-2\alpha}(r^{2\alpha} w(r))'} + \underbrace{w''(r) + \frac{n-1}{r}\, w'(r)}_{=r^{1-n}(r^{n-1} w'(r))'} = 0$$

Wähle $\alpha = \dfrac{n}{2}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(r^n w(r))' + (r^{n-1} w'(r))' = 0\\
\Rightarrow &\frac{1}{2}\, r^n\, w(r) + r^{n-1}\, w'(r) = \text{ const. } = a \in \mathbb{R}.\\
\text{Wähle } a = 0 \Rightarrow & w' = -\frac{1}{2}\, r\, w
\end{aligned}$$

Lösung:

$$w(r) = b e^{-\frac{r^2}{4}}, b \in \mathbb{R}.$$

Somit erhalten wir selbstähnliche Lösungen von (1):

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} w\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) = \frac{b}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Die spezielle Wahl $b = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}$ führt nun zur Definition der Fundamentallösung.

Definition 4.2
Die Funktion

$$\Phi : \begin{cases} \Omega \times (0,\infty) & \to \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung.

Lemma 4.3
Für alle $t > 0$ gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, dx = 1.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, dx &= \frac{1}{(4\pi\, t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, dx \\
&\overset{y=\frac{x}{2\sqrt{t}}}{=} \frac{(2\sqrt{t})^n}{(4\pi\, t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\, dy \overset{|y|^2=y_1^2+\cdots+y_n^2}{=} \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|y_i|^2}\, dy_i \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \Bigg(\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\, ds}_{\sqrt{\pi}} \Bigg)^n = 1
\end{aligned}$$

□

4.2 Lösung des Cauchyproblems für die homogene WLG

Gegeben: Anfangswert $g \in C(\mathbb{R}^n)$ bei $t = 0$.

Gesucht: Lösung u von

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0_+}} u(x,t) = g(x_0) & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

u heißt Lösung der WLG (1), falls die folgenden partiellen Ableitungen von u auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ existieren und stetig sind:

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i,j = 1,\dots,n$$

und für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

Kurzschreibweise: $u \in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\big)$.

Satz 4.4
Sei $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann löst die Funktion

$$u(x,t) = \begin{cases} \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ \qquad (x,t) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy = \frac{1}{(4\pi\, t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, g(y)\, dy \end{cases}$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung und es gilt:

a) $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\big)$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0+}} u(x,t) = g(x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$

Bemerkung b) bedeutet, dass u stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ ist und $u(x,0) = g(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. (a) Sei $\delta > 0, R > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest, $M_\delta = \mathbb{R}^n \times [\delta,\infty)$. Die Abbildung

$$\begin{cases} M_\delta \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \Phi(x,t) \end{cases} \text{ist in } C^\infty(M_\delta)$$

und für jede partielle Ableitung gilt auf M_δ:

$$|D^\alpha \Phi(x,t)| \le C_{\alpha,\delta}\, |p_\alpha(x)|\, e^{-\frac{|x|^2}{4\delta}} \le \bar{C}_{\alpha,\delta}\, e^{-\frac{|x|^2}{8\delta}},$$

wobei p_α ein Polynom in x mit $\deg(p_\alpha) \le 2|\alpha|$ ist.

Für $x \in B_R(x_0), t \geq \delta, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2xy \geq \frac{1}{2}|y|^2 - |x|^2$.
Damit gilt folgende Abschätzung:

$$|D^\alpha \Phi(x-y,t)| \leq \bar{C}_{\alpha,\delta}\, e^{\frac{-|x-y|^2}{8\,\delta}} \leq \tilde{C}_{\alpha,\delta}\, e^{\frac{|x|^2}{8\,\delta}}\; e^{\frac{-|y|^2}{16\,\delta}} \leq \underbrace{\tilde{C'}_{\alpha,\delta,R}\, e^{\frac{-|y|^2}{16\,\delta}}}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Damit (vgl. Handout A.3)

$$u \in C^\infty\big(\mathbb{R}^n \times (\delta,\infty)\big) \qquad \text{und}$$
$$D^\alpha u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\alpha_{x,t}\big(\Phi(x-y,t)\big)\, g(y)\; dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(D^\alpha\, \Phi\big)\big(x-y,t\big)\, g(y)\; dy$$

und insbesondere

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta\Phi\right)}_{=0} (x-y,t)\, g(y)\; dy = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (\delta,\infty).$$

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$. Dann existiert aufgrund der Stetigkeit von g ein $\delta > 0$ mit

$$|y - x_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Sei $|x - x_0| < \dfrac{\delta}{2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|u(x,t) - g(x_0)| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\big(g(y) - g(x_0)\big)\; dy\right| \\ &\leq \underbrace{\int\limits_{B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\; dy}_{=:I_1} + \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\; dy}_{=:I_2}.\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.3 gilt

$$I_1 \leq \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\; dy = \varepsilon.$$

Für I_2 beachte, dass für $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned}&|y - x_0| \leq |y-x| + |x-x_0| \leq |y-x| + \frac{\delta}{2} \leq |y-x| + \frac{|y-x_0|}{2} \\ &\Rightarrow \frac{|y-x_0|}{2} \leq |y-x|.\end{aligned}$$

Weiter folgt also

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \frac{2\,\|g\|_\infty}{(4\,\pi\,t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x_0)} e^{\frac{-|y-x_0|^2}{16\,t}}\,dy \\
&\overset{y-x_0=z}{=} \frac{2\,\|g\|_\infty}{(4\,\pi\,t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(0)} e^{\frac{-|z|^2}{16\,t}}\,dz \\
&\overset{\frac{z}{\sqrt{16\,t}}=\xi}{=} \frac{2\,\|g\|_\infty\,(16\,t)^{n/2}}{(4\,\pi\,t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\delta'}(0)} e^{-|\xi|^2}\,d\xi \qquad \text{mit } \delta' = \frac{\delta}{\sqrt{16t}} \\
&= \|g\|_\infty\,C_n\,\omega_n \int\limits_{\delta/\sqrt{16\,t}}^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1}\,dr \quad \xrightarrow{t\to 0+} 0 \quad \text{gleichmäßig für } x \in B_{\delta/2}(x_0),
\end{aligned}
$$

d.h.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ t\to 0+}} u(x,t) = g(x_0).$$

□

4.3 Lösung des inhomogenen Cauchyproblems

Erinnerung an die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\dot u = Au, \quad A \in \mathbb{R}^{N\times N} \text{ Matrix}$$

Lösungen: $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ haben die Form $u(t) = e^{t\,A}\cdot c, c \in \mathbb{R}^N$, wobei die Matrix-Exponentialfunktion definiert ist über

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Dabei kann man die (Spalten der) Matrix $e^{t\,A}$ als Fundamentalsystem für die homogene gewöhnliche Differentialgleichung verstehen. Für die Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot u = Au + f(t)$$

für eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ wähle den Ansatz (Variation der Konstanten)

$$u(t) = e^{t\,A}\cdot c(t)$$

wobei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine zu findende Funktion ist. Einsetzen ergibt

$$e^{t\,A}\dot c(t) = f(t) \quad \Rightarrow c(t) = \int_0^t e^{-s\,A} f(s)\,ds.$$

$$\text{Ergebnis:} \qquad u(t) = \int_0^t e^{(t-s)\,A} f(s)\,ds.$$

Dies ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Sie erfüllt insbesondere $u(0) = 0$. Beachte schließlich: $e^{(t-s)\,A}$ in der Ergebnis-Formel ist das Fundamentalsystem zur Zeit $t-s$.

Problemstellung: inhomogene WLG mit Anfangsdaten $g = 0$, d.h.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \qquad\qquad u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Idee:

$$u(x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \tag{$\star$}$$

Satz 4.5
Sei $f \in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\big) \cap C\big(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\big)$ beschränkt mit beschränkten Ableitungen und u sei definiert durch ($\star$). Dann gilt:

(a) $u \in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\big)$,

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t)$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

(c) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis von Satz 4.5. (c) Mit Lemma 4.3 gilt:

$$|u(x,t)| \le \|f\|_\infty \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, dy}_{=1}\, ds = t \cdot \|f\|_\infty \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

(a)+(b) Substituiere $z := x - y, \tau := t - s$. Damit gilt

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Phi(z,\tau)\, f(x-z,t-\tau)}_{=:\psi(z,\tau,x,t)}\, dz\, d\tau.$$

$$\left|D^\alpha_{x,t}\, \psi(z,\tau,x,t)\right| \le \Phi(z,\tau)\, \|D^\alpha f\|_\infty$$

Mit Handout A.3 folgt:

$$u \in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\big)$$

und es gilt:

$$\Delta u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,\tau)\, \big(\Delta_x f\big)(x-z,t-\tau)\, dz\, d\tau$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,\tau) \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(x-z,t-\tau)\, dz\, d\tau + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,t)\, f(x-z,0)\, dz}_{=:K}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right)(x,t) = \underbrace{\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,\tau) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(x-z,t-\tau)\, dz\, d\tau}_{I_1}$$

$$+ \underbrace{\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,\tau) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(x-z,t-\tau)\, dz\, d\tau}_{I_2} \qquad + K.$$

I_1 schätzen wir wie folgt ab:

$$I_1 \leq \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f \right\|_\infty \int_0^\varepsilon \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,\tau)\, dz}_{=1} \, d\tau = \varepsilon \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f \right\|_\infty$$

Für I_2 verwenden wir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x-z, t-\tau) = \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} - \Delta_z \right) f(x-z, t-\tau)$$

und partielle Integration bezüglich τ und z ergibt (Begründung für partielle Integration bzgl. z s.u.):

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \Delta_z \right) \Phi(z,\tau)}_{=0} \, f(x-z, t-\tau)\, dz\, d\tau \\ &\quad - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,t)\, f(x-z, \underbrace{t-t}_{=0})\, dz + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,\varepsilon)\, f(x-z, t-\varepsilon)\, dz \\ &= -K + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,\varepsilon)\, f(x-z, t-\varepsilon)\, dz. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u(x,t) = I_1 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,\varepsilon)\, f(x-z, t-\varepsilon)\, dz = \underbrace{I_1}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0} + \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,\varepsilon)\, f(y, t-\varepsilon)\, dy}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(x,t) \text{ nach Satz 4.4b)}},$$

d.h.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0.$$

Begründung der partiellen Integration bezüglich z (hier sei $h : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit beschränkten Ableitungen): für $\tau \leq t$ gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|z|^2}{4\tau}} \frac{\partial}{\partial z_i} h(z,\tau)\, dz &= \lim_{R \to \infty} \int\limits_{B_R(0)} e^{\frac{-|z|^2}{4\tau}} \frac{\partial}{\partial z_i} h(z,\tau)\, dz \\ &\overset{\text{G.I.S.}}{=} \lim_{R \to \infty} \int\limits_{B_R(0)} -\frac{\partial}{\partial z_i} e^{\frac{-|z|^2}{4\tau}} h(z,\tau)\, dz + \underbrace{\lim_{R \to \infty} \oint\limits_{\partial B_R(0)} \underbrace{e^{\frac{-|z|^2}{4\tau}} h(z,\tau) \nu_i \, d\sigma_z}_{|\cdot| \leq \|h\|_\infty e^{\frac{-R^2}{4\tau}}}}_{=0} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial}{\partial z_i} \left(e^{\frac{-|z|^2}{4\tau}} \right) h(z,\tau)\, dz \end{aligned}$$

Gleiches gilt für $\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$ anstatt $\frac{\partial}{\partial z_i}$.

$\square$

Korollar 4.6
Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt sowie $f \in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\right) \cap C\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right)$ beschränkt mit beschränkten Ableitungen. Für die Funktion

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y)\, dy + \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

gilt $u \in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\right)$ und u löst

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0) \\ t>0}} u(x,t) = g(x_0) & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Bemerkung u aus Korollar 4.6 ist eine Lösung des Cauchy-Problems (keine Eindeutigkeitsaussage).

4.4 Mittelwerteigenschaft für Lösungen der homogenen WLG

Definition 4.7 (Parabolischer Zylinder, parabolischer Rand)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T > 0$.

(a) $\Omega_T := \Omega \times (0,T]$ heißt parabolischer Zylinder,

(b) $\Gamma_T := \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$ heißt parabolischer Rand. Es gilt $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0,T] \cup (\overline{\Omega} \times \{0\})$.

Bemerkung Boden und Zylindermantel gehören zu Γ_T; der Deckel gehört zu Ω_T.

Wir betrachten die homogene Wärmeleitungsgleichung in einem parabolischen Zylinder Ω_T :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0,T]$$

Definition 4.8 (Wärmekugel)
Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 > 0$ und $r > 0$. Dann heißt

$$E(x_0, t_0; r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) : s \le t_0,\ \Phi(x_0 - y, t_0 - s) \ge \frac{1}{r^n} \right\}$$

Wärmekugel um den Punkt (x_0, t_0) mit Radius r.

Wie sieht eine Wärmekugel aus?

(a) Es gehen nur Punkte (y,s) ein mit $0 < s \le t_0$.

(b) Es gilt folgende Analogie zu euklidischen Kugeln mittels der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, vgl. Definition 3.15 in Kapitel 3:

$$\overline{B_r(x_0)} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| \le r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\gamma_0(x_0 - y)}_{g_0(|x_0 - y|)} \ge g_0(r)\}$$

(c)

$$\begin{aligned} E(x_0, t_0; r) &= \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) :\ s \le t_0,\ \frac{1}{(4\pi(t_0 - s))^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x_0-y|^2}{4(t_0-s)}} \ge \frac{1}{r^n} \right\} \\ &= \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) :\ s \le t_0,\ |x_0 - y|^2 \le -4(t_0 - s)\frac{n}{2} \log\left(\frac{4\pi(t_0 - s)}{r^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

Was lässt sich daraus über die Form von Wärmekugeln schliessen?

(1) Wärmekugeln sind invariant bzgl. räumlichen Rotationen um x_0.

(2) Wärmekugeln bestehen aus euklidischen Kugeln im Raum, die einen in der Zeitrichtung s veränderlichen Radius $-4(t_0 - s)\frac{n}{2}\log\left(\frac{4\pi(t_0-s)}{r^2}\right)$ haben.

(3) Zur Zeit $s = t_0$ und $s = t_0 - \frac{r^2}{4\pi}$ ist dieser Radius 0.

(4) Damit die Wärmekugel mit räumlichem Radius r vollständig in die Menge $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ passt, muss gelten $t_0 > \frac{r^2}{4\pi}$.

Lemma 4.9
Sei $r^2 \le 4\pi t_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$1 = \frac{1}{4r^n} \int\limits_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, d(y, s).$$

Satz 4.10 (Mittelwerteigenschaft)
Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ Lösung der homogenen WLG. Ferner sei $(x_0, t_0) \in \Omega_T, r^2 \le 4\pi t_0$ und $E(x_0, t_0; r) \subset \Omega_T$. Dann gilt:

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \int\limits_{E(x_0,t_0;r)} u(y, s)\, \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, d(y, s).$$

Bemerkung Bei der Mittelwertformel gehen nur Werte aus der zeitlichen Vergangenheit $s \le t_0$ ein.

Beweis von Lemma 4.9.

$$I := \int\limits_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, d(y, s) \overset{\text{Cavalieri}}{=} \int\limits_{t_0-\frac{r^2}{4\pi}}^{t_0} \int\limits_{B_{\rho(s)}(x_0)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, dy\, ds,$$

wobei

$$\rho(s) = \sqrt{-2n(t_0 - s)\log\left(\frac{4\pi(t_0 - s)}{r^2}\right)} \quad \text{aus } (*).$$

Berechne zuerst

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} |x_0 - y|^2\, dy = \omega_n \int_0^\rho r^2 r^{n-1}\, dr = \frac{\rho^{n+2}\,\omega_n}{n+2}.$$

Damit

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\omega_n}{n+2} \int\limits_{t_0-\frac{r^2}{4\pi}}^{t_0} \left(-2n(t_0 - s)\,\log\left(\frac{4\pi(t_0 - s)}{r^2}\right)\right)^{\frac{n+2}{2}} \frac{1}{(t_0 - s)^2}\, ds \\
&\overset{\tau:=\frac{4\pi(t_0-s)}{r^2}}{=} \frac{\omega_n}{n+2} \int_0^1 \left(\frac{n r^2}{2\pi}\right)^{\frac{n+2}{2}} \big(-\tau\log(\tau)\big)^{\frac{n+2}{2}} \left(\frac{4\pi}{r^2\tau}\right)^2 \frac{r^2}{4\pi}\, d\tau \\
&= \frac{\omega_n}{n+2} r^n n^{\frac{n+2}{2}} 2^{\frac{2-n}{2}} \pi^{-\frac{n}{2}} \int_0^1 \tau^{\frac{n-2}{2}} \Big(\underbrace{\log\frac{1}{\tau}}_{-\log\tau}\Big)^{\frac{n+2}{2}}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Erinnerung an die Gammafunktion:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty \xi^{a-1}\, e^{-\xi}\, d\xi, \quad a > 0,$$
$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a). \qquad \text{Für } a \in \mathbb{N} \text{ gilt } \Gamma(a+1) = a!$$
$$\omega_n = \frac{2\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}, \text{vgl. Kapitel 3, Definition 3.6.}$$

Damit betrachte nun

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \tau^{\frac{n-2}{2}} \left(\log\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{n+2}{2}} d\tau \qquad \text{Substitution: } \log\frac{1}{\tau} = z, -\frac{1}{\tau}d\tau = dz\\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{n}{2}z} z^{\frac{n+2}{2}}\, dz, \qquad \text{weitere Substitution: } \xi := \frac{n}{2}z\\
&= \left(\frac{n}{2}\right)^{-(\frac{n+4}{2})} \int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{\frac{n+2}{2}} d\xi\\
&= \left(\frac{n}{2}\right)^{-(\frac{n+4}{2})} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{n+4}{2}} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\\
&= \left(\frac{n}{2}\right)^{-(\frac{n+2}{2})} \frac{n+2}{2} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\omega_n}\\
&\quad \Rightarrow I = 4\,r^n \Rightarrow \text{Behauptung in Lemma 4.9.}
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 4.10. Definiere

$$\psi(r) := \frac{1}{4\,r^n} \int\limits_{E(x_0,t_0;\,r)} u(y,s) \cdot \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, d(y,s).$$

Idee: Zeige $\psi'(r) = 0$, d.h. ψ ist vom Radius r unabhängig. Dann erhält man:

$$\psi(r) = \lim_{\rho\to 0}\psi(\rho) \overset{\text{Übung}}{=} u(x_0,t_0) \cdot \underbrace{\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{4\rho^n} \int\limits_{E(x_0,t_0;\,\rho)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, d(y,s)}_{=1} = u(x_0,t_0).$$

Problem: r taucht im Integrationsgebiet $E(x_0,t_0;\,r)$ auf, wie differenziert man in diesem Fall?

Transformiere die Variablen $\frac{x_0-y}{r} =: \xi$, $\frac{t_0-s}{r^2} =: \tau$ mit $d(y,s) = r^{n+2}\, d(\xi,\tau)$. Damit gilt:

$$\psi(r) = \frac{1}{4}\int\limits_{E_1} u(x_0 - r\,\xi, t_0 - r^2\,\tau)\frac{|\xi|^2}{\tau^2}\, d(\xi,\tau)$$

$$\text{wobei } E_1 = \{(\xi,\tau) : 0 < \tau < \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{(4\,\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|\xi|^2}{4\,\tau}} \geq 1\}.$$

$$\begin{aligned}
\psi'(r) &= \frac{1}{4}\int\limits_{E_1} \left((-\nabla u)(x_0 - r\,\xi, t_0 - r^2\tau)\cdot\xi - 2r\,\tau(\frac{\partial u}{\partial s})(x_0 - r\xi, t_0 - r^2\tau)\right)\frac{|\xi|^2}{\tau^2}\, d(\xi,\tau)\\
&= -\frac{1}{4\,r^{n+1}} \int\limits_{E(x_0,t_0;\,r)} \left((\nabla u)(y,s)(x_0-y) + 2(t_0-s)\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)\right)\frac{|y-x_0|^2}{(t_0-s)^2}\, d(y,s)\\
&= A + B.
\end{aligned}$$

Betrachte

$$h(y,s) = -\frac{n}{2}\log\big(4\pi(t_0-s)\big) - \frac{|x_0-y|^2}{4(t_0-s)} + n\,\log(r)$$

d.h.

$$e^{h(y,s)} = \Phi(y-x_0, t_0-s)r^n.$$

Es gilt

$$h(y,s) = 0 \text{ auf } \partial E(x_0,t_0;\,r),$$

sowie

$$\nabla_y h(y,s) = -\frac{y-x_0}{2(t_0-s)}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{4r^{n+1}} \int\limits_{E(x_0,t_0;\,r)} 4\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)\nabla_y h(y,s)\cdot(y-x_0)\; d(y,s) \\
&\underset{\text{Cavalieri}}{\overset{\text{A.1,2}}{=}} -\frac{1}{4r^{n+1}} \int\limits_{E(x_0,t_0;\,r)} 4n\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)\; h(y,s) + 4\big(\nabla_y\frac{\partial}{\partial s}u\big)(y,s)\cdot(y-x_0)\; h(y,s)\; d(y,s)
\end{aligned}$$

In diesem Schritt passierte folgendes: zuerst wurde das Integral über die Wärmekugel mit Cavalieri in ein äusseres Integral in der Zeit von $t_0-\frac{r^2}{4\pi}$ bis t_0 und ein inneres (räumliches) Integral über euklidische Kugeln mit zeitabhängigem Radius geschrieben. Auf das innere (räumliche) Integral wurde dann der Gaussche Integralsatz angewendet. Nun wenden wir in der obigen Formel nochmals die partielle Integration diesmal bzgl. s auf das zweite Integral an und erhalten:

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{1}{4r^{n+1}} \int\limits_{E(x_0,t_0;\,r)} 4n\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)\; h(y,s) - 4\nabla_y u(y,s)\cdot(y-x_0)\cdot\Bigg(\underbrace{\frac{n}{2}\frac{1}{t_0-s} - \frac{|x_0-y|^2}{4(t_0-s)^2}}_{=\frac{\partial h}{\partial s}(y,s)}\Bigg)\, d(y,s) \\
&= -\frac{1}{4r^{n+1}} \int\limits_{E(x_0,t_0;\,r)} 4n\frac{\partial u}{\partial s}(y,s)\; h(y,s) - \frac{2n}{(t_0-s)}\nabla_y u(y,s)\cdot(y-x_0)\; d(y,s) - A
\end{aligned}$$

Kommen wir nun zurück zur Berechnung von $\psi'(r)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\psi'(r) = A + B &= -\frac{1}{4r^{n+1}} \int\limits_{E(x_0,t_0;\,r)} 4n(\Delta u)(y,s)\; h(y,s) - \frac{2n}{(t_0-s)}\nabla_y u(y,s)\cdot(y-x_0)\; d(y,s) \\
&\underset{\text{Cavalieri}}{\overset{\text{A.1,2}}{=}} -\frac{1}{4r^{n+1}} \int\limits_{E(x_0,t_0;\,r)} \underbrace{\Big(-4\,n\nabla_y u(y,s)\cdot\nabla_y h(y,s) - \frac{2\,n}{t_0-s}\nabla_y u(y,s)\cdot(y-x_0)\Big)}_{=0}\; d(y,s) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Folglich hängt der Wert von ψ nicht von r ab und wir können ihn durch Limesbildung $r\to 0$ wie folgt ermitteln:

$$\psi(r) = \lim_{\rho\to 0}\psi(\rho) \overset{\text{Übung}}{=} u(x_0,t_0)\lim_{\rho\to 0}\underbrace{\frac{1}{4\rho^n}\int\limits_{E(x_0,t_0;\,\rho)}\frac{|x_0-y|}{(t_0-s)^2}\,d(y,s)}_{=1} = u(x_0,t_0).$$

□

4.5 Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung

Satz 4.11
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $T > 0$. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ Lösung der homogenen WLG. Falls $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ existiert mit $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u$, dann folgt $u \equiv$ const. auf $\overline{\Omega}_{t_0}$.

Korollar 4.12
Ω, u seien wie in Satz 4.11. Dann gilt:

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u,$$

d.h. das Maximum wird auf dem parabolischen Rand angenommen.

Beweis von Korollar 4.12. „$\geq$“ klar, weil $\overline{\Omega}_T \supset \Gamma_T$.

„$\leq$“ Aus Kompaktheitsgründen $\exists (x_0, t_0) \in \overline{\Omega}_T$ mit $u(x_0, t_0) = M := \max_{\overline{\Omega}_T} u$. Falls $(x_0, t_0) \in \Gamma_T$, dann gilt „$=$“, also auch „$\leq$“.

Andernfalls ist $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ und mit Satz 4.11 gilt $u \equiv M$ in $\overline{\Omega}_{t_0}$, also insbesondere $u \equiv M$ auf $\Gamma_{t_0} \subset \Gamma_T$, d.h. „$\leq$“ gilt hier auch. $\square$

Bemerkungen

(a) Satz 4.11 und Korollar 4.12 lassen sich auch für das Minimum anstelle des Maximums formulieren.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Definiere

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \in \overline{\Omega} \times [0, t_1] \\ \dfrac{1}{4\pi\,(t-t_1)^{n/2}} e^{-\frac{|x-x_1|^2}{4\,(t-t_1)}}, & x \in \overline{\Omega}, t > t_1 \end{cases}$$

$u \in C^\infty\big(\overline{\Omega} \times [0, \infty)\big)$ löst die homogene WLG auf $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$.

Sei $T > t_1$. Offensichtlich ist

$$\min_{\overline{\Omega}_T} u = 0 \quad \text{und} \quad u \equiv 0 \text{ in } \Omega \times [0, t_1].$$

Die Schlussfolgerung $u \equiv 0$ aus Satz 4.11 ist also nur in die Vergangenheit $t \leq t_1$ möglich, nicht aber für die Zukunft $t > t_1$.

Beweis von Satz 4.11. Sei $y_0 \in \Omega, 0 < s_0 < t_0$.

Ziel: Zeige

$$u(y_0, s_0) = u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u =: M.$$

Damit gilt dann $u \equiv M$ auf $\Omega \times (0, t_0)$ und wegen Stetigkeit von u auch auf $\overline{\Omega}_{t_0}$.

Sei also $\gamma : [0,1] \to \Omega$ ein Weg, der x_0 und y_0 in Ω verbindet mit $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_0$.

Sei

$$\widetilde{\gamma} : \begin{cases} [0,1] \to \Omega_{t_0} \\ \quad \xi \mapsto \big(\gamma(\xi), \xi s_0 + (1-\xi) t_0\big) \end{cases}$$

$$\widetilde{\gamma}(0) = (x_0, t_0), \widetilde{\gamma}(1) = (y_0, s_0)$$

$$\xi_0 := \max\{\xi \in [0,1] : u(\widetilde{\gamma}(\eta)) = M, \quad \forall \eta \in [0, \xi]\}.$$

Annahme: $\xi_0 < 1$. $(x_1, t_1) := \widetilde{\gamma}(\xi_0)$, $u(x_1, t_1) = M$. Betrachte die Wärmekugel $E(x_1, t_1; r)$, wobei $r > 0$ so klein ist, dass $E(x_1, t_1; r) \subset \Omega_{t_0}$. Verwende die Mittelwerteigenschaft (Satz 4.10):

$$\begin{aligned} M = u(x_1, t_1) &= \frac{1}{4\,r^n} \int\limits_{E(x_1,t_1;r)} u(y,s)\, \frac{|x_1 - y|^2}{(t_1 - s)^2}\, d(y,s) \\ &\leq M \underbrace{\frac{1}{4\,r^n} \int\limits_{E(x_1,t_1;r)} \frac{|x_1 - y|^2}{(t_1 - s)^2}\, d(y,s)}_{=1} = M. \end{aligned}$$

Da außerdem $u \leq M$ gilt, folgt $u \equiv M$ in $E(x_1, t_1; r)$, d.h. $u(\widetilde{\gamma}(\xi)) = M$ für $\xi \in [\xi_0, \xi_0 + \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$. $\lightning$ zur Definition von ξ_0. Also ist die Annahme $\xi_0 < 1$ falsch, d.h. es gilt $\xi_0 = 1$ und daher $u(y_0, s_0) = M$. □

Korollar 4.13 (Eindeutigkeitssatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $T > 0$ und $f \in C(\overline{\Omega}_T), g \in C(\Gamma_T)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ von

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ \qquad\quad u = g & \text{auf } \Gamma_T. \end{cases}$$

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ Lösungen und setze $v := u_1 - u_2$.

Dann löst v das Problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{in } \Omega_T \\ \qquad\quad v = 0 & \text{auf } \Gamma_T. \end{cases}$$

Mit Korollar 4.12 gilt:

$$\left.\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}_T} v = \max_{\Gamma_T} v = 0 \\ \min_{\overline{\Omega}_T} v = \min_{\Gamma_T} v = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow v \equiv 0 \text{ in } \overline{\Omega}_T.$$

□

Ziel: Erweiterung des Maximumsprinzips und des Eindeutigkeitssatzes auf die Lösungen des Cauchy-Problems.

Satz 4.14
Sei $g \in C(\mathbb{R}^n)$ beschränkt und $u \in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n \times (0,T]\big) \cap C\big(\mathbb{R}^n \times [0,T]\big)$ sei Lösung der homogenen WLG:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Falls $a, A > 0$ existieren mit

$$u(x,t) \leq A \cdot e^{a|x|^2} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T],$$

dann gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Vorbemerkung zum Beweis: Die Funktion $\dfrac{1}{(-t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ löst die homogene WLG für negative Zeiten ($t<0, x\in\mathbb{R}^n$).

Beweis. (a) Angenommen $T>0$ erfüllt $4aT<1$. Für $\mu>0$ fest sei

$$w(x,t)=\frac{\mu}{(T-t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4(T-t)}},\quad -\infty<t<T.$$

w löst die homogene WLG auf $\mathbb{R}^n\times(-\infty,T)$, also insbesondere auf $\mathbb{R}^n\times[0,\frac{T}{2}]$.
Daher löst

$$v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$$

ebenfalls die homogene WLG auf $\mathbb{R}^n\times[0,\frac{T}{2}]$.

(b)

$$\forall x\in\mathbb{R}^n:\quad v(x,0)=u(x,0)-\frac{\mu}{T^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4T}}\ \le u(x,0)\ =g(x)\ \le\sup_{\mathbb{R}^n}g=:\gamma$$

Für $|x|=r, 0\le t\le\frac{T}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned}v(x,t)&=u(x,t)-\frac{\mu}{(T-t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{r^2}{4\,(T-t)}}\\&\le u(x,t)-\frac{\mu}{T^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{r^2}{4\,T}}\\&\le Ae^{a\,r^2}-\frac{\mu}{T^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{r^2}{4\,T}}\xrightarrow[a<\frac{1}{4T}]{r\to\infty}-\infty.\end{aligned}$$

D.h. $\exists\, r_0>0$

$$(*)\qquad |x|=r\ge r_0, t\in[0,\frac{T}{2}]\quad\Rightarrow\quad v(x,t)\le\gamma=\sup_{\mathbb{R}^n}g.$$

Für $\Omega=B_{r_0}(0)$ gilt daher $v\le\gamma$ auf $\Gamma_{\frac{T}{2}}$.

Mit Korollar 4.12: $v\le\gamma$ auf $\Omega_{\frac{T}{2}}$. Hiermit und mit $(*)$ folgt dann auch $v\le\gamma$ auf $\mathbb{R}^n\times[0,\frac{T}{2}]$.

Für $\mu\to 0:\quad u\le\gamma$ auf $\mathbb{R}^n\times[0,\frac{T}{2}]$.

(c) Erweiterung auf $[0,T]$:
$T':=\frac{1}{8a}$. Verwende (a) für Lösung u auf $\mathbb{R}^n\times[0,T']$ und erhalte $u\le\gamma$ auf $\mathbb{R}^n\times[0,\frac{T'}{2}]$.
Definiere $u_1(x,t):=u(x,t+\frac{T'}{2})$. u_1 löst die homogene WLG auf $\mathbb{R}^n\times[0,T-\frac{T'}{2}]$.
Bei $t=0:\quad g_1(x):=u_1(x,0)=u(x,\frac{T'}{2})$. Wende (a) und (b) auf u_1 an; dann folgt

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,\frac{T'}{2}]}u_1\le\sup_{\mathbb{R}^n}g_1\qquad\text{d.h.}\qquad\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,\frac{T'}{2}]}u(x,t+\frac{T'}{2})\le\gamma.\qquad\Rightarrow\qquad u\le\gamma\text{ auf }\mathbb{R}^n\times[0,T'].$$

Mit Induktion:
$u_k(x,t):=u_{k-1}(x,t+\frac{T'}{2}),\quad t\in[0,\frac{T'}{2}], x\in\mathbb{R}^n.$
Bei $t=0:\quad g_k(x):=u_k(x,0)=u_{k-1}(x,\frac{T'}{2})$. Wende (a) und (b) an:
$u_k\le\gamma$ auf $\mathbb{R}^n\times[0,\frac{T'}{2}]$, d.h. $u\le\gamma$ auf $\mathbb{R}^n\times[0,(k+1)\frac{T'}{2}]$. Verwende nun so viele Schritte bis $(k+1)\frac{T'}{2}\ge T$ gilt.

□

Korollar 4.15 (Eindeutigkeitssatz für das Cauchy-Problem)
Sei $g \in C(\mathbb{R}^n)$ beschränkt und $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T]), T > 0$.

Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ des Problems

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u(x,0) = g & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

welche der folgenden Wachstumsbedingung genügt:

$$\exists a, A > 0 : |u(x,t)| \le A e^{a|x|^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,T]. \tag{$*$}$$

Beweis. u_1, u_2 seien Lösungen, die der Bedingung ($*$) genügen. Wende Satz 4.14 auf $v = u_1 - u_2$ bzw. $v = u_2 - u_1$ an. □

Bemerkung In Korollar 4.6 wurde für f, g beschränkt (sowie weiteren Annahmen) eine explizite Lösung u des Cauchy-Problems konstruiert:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dyds.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\le \|g\|_\infty \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, dy}_{=1} + \|f\|_\infty \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, dy\, ds}_{=1} \\ &\le \|g\|_\infty + T\,\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Dieses u erfüllt also die Bedingung ($*$). Mit Korollar 4.15 folgt: innerhalb der Klasse von Funktionen, die ($*$) erfüllt, ist u eindeutige Lösung.

Zwei abschließende Ziele für dieses Kapitel:

(a) Variante des Eindeutigkeitsbeweises von Satz 4.13.

(b) Existenz von Lösungen der inhomogenen WLG für $n = 1, \Omega = (a,b)$.
Allgemeine Existenzaussagen werden in der Vorlesung „Evolutionsgleichungen" bewiesen.

Satz 4.16 (Eindeutigkeitsaussage mittels Energiemethode)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $f \in C(\overline{\Omega}_T), g \in C(\Gamma_T)$ für ein $T > 0$.

Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0,T]) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ von

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T. \end{cases}$$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie bei Satz 2.14 mit Hilfe der Energiemethode. Sind u_1, u_2 zwei Lösungen, so löst $v := u_1 - u_2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{in } \Omega_T \\ v = 0 & \text{auf } \Gamma_T. \end{cases}$$

Definiere

$$e(t) := \int_\Omega v(x,t)^2\,dx, \quad 0 \le t \le T.$$

e ist stetig auf $[0,T]$ und für $t \in [0,T]$ gilt:

$$\begin{aligned} e'(t) = 2\int_\Omega v(x,t)\,\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\,dx \;&\overset{v \text{ löst}}{\underset{\text{WLG}}{=}}\; 2\int_\Omega v(x,t)\,\Delta v(x,t)\,dx \\ &\overset{\text{GIS } 2}{=} -2\int_\Omega |\nabla v(x,t)|^2\,dx + 2\oint_{\partial\Omega} \underbrace{v(x,t)}_{=0}\,\nabla v(x,t)\cdot\nu(x)\,d\sigma_x \le 0, \end{aligned}$$

d.h. e ist als Funktion von t monoton fallend. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 \le e(t) \le e(0) = 0, &\quad 0 \le t \le T. \\ \Rightarrow e(t) = 0, &\quad \forall\, t \in [0,T], \end{aligned}$$

also ist $v \equiv 0$ auf Ω_T. □

4.6 Anfangs-Randwertproblem für die inhomogene 1-D WLG

Sei $n = 1, \Omega = (0,\pi)$.

Betrachte das Problem

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & \text{auf } \Omega_T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall t \in [0,T], \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Erinnerung: Fourier-Reihen

Sei $h \in L^1(-\pi,\pi)$. Die Fourier-Reihe von h ist gegeben durch:

$$\hat{h}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}_0 \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ist $h \in L^2(-\pi,\pi)$ so folgt $\hat{h} = h$ fast überall auf $[-\pi,\pi]$. Ist h 2π-periodisch und $h \in C^1(\mathbb{R})$, so konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig und es gilt

$$\hat{h}(x) = h(x) \quad \forall x \in [-\pi,\pi].$$

Nun zum Problem (P)**:** Sei $g \in C^1([0,\pi]),\ g(0) = g(\pi) = 0$. Definiere

$$h(x) := \begin{cases} g(x), & 0 \le x \le \pi \\ -g(-x), & -\pi \le x \le 0. \end{cases}$$

Dann ist h 2π-periodisch und $h \in C^1([-\pi,\pi])$. Da h ungerade ist, gilt für die Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}\hat{h}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = g(x), \quad x \in [0,\pi] \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx.\end{aligned}$$

Wir treffen folgende weitere Annahmen: $f, f_x \in C([0,\pi]\times[0,T])$ und $f(0,t) = f(\pi,t) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$. Dann gilt

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin(kx), \quad c_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,t)\sin(kx)\,dx.$$

Wir machen folgenden Ansatz für die Lösung u von (P):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)\sin(kx) \tag{3}$$

Formales Einsetzen des Ansatzes in die WLG ergibt:

$$\begin{aligned}u_t(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k'(t)\sin(kx) \\ u_{xx}(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 d_k(t)\sin(kx)\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die folgende gewöhnliche DGL für die Koeffizienten:

$$u_t - u_{xx} = f \xrightarrow{\text{Koeffizientenvergleich}} d_k'(t) + k^2 d_k(t) = c_k(t)$$

Einsetzen der Anfangsbedingung bei $t = 0$ liefert mit Koeffizientenvergleich die Anfangsbedingung für diese gewöhnliche DGL:

$$u(x,0) = g(x) \xrightarrow{\text{Koeffizientenvergleich}} d_k(0) = b_k$$

Löse für $k \in \mathbb{N}$ die gewöhnliche DGL:

$$d_k(t) = b_k e^{-k^2 t} + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} c_k(\tau)\,d\tau \tag{4}$$

Frage:

Definiert man $d_k(t)$ für $0 \le t \le T$ durch die Gleichung (4) und $u : [0,\pi]\times[0,T] \to \mathbb{R}$ durch (3), löst dieses u dann (P)?

Satz 4.17
Sei $f \in C^{2,1}([0,\pi]\times[0,T])$, $f(0,t) = f(\pi,t) = 0\,\forall t \in [0,T]$ und $g \in C^1([0,\pi])$, $g(0) = g(\pi) = 0$. Dann ist

$$u(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t}\sin(kx) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-k^2(t-\tau)}\sin(kx)\,c_k(\tau)\,d\tau\right), \qquad x \in [0,\pi], t \in [0,T]$$

Lösung von (P). Insbesondere ist $u \in C^{2,1}((0,\pi)\times[0,T]) \cap C([0,\pi]\times[0,T])$.

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Spezialfall $f \equiv 0$, d.h. $c_k \equiv 0, k \in \mathbb{N}$ und $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$. In diesem Fall können wir $T = \infty$ annehmen, weil wir die Lösung u für $x \in [0,\pi]$ und $t \in [0,\infty)$ erklären können.

i) Zeige: $u \in C([0,\pi] \times (0,\infty))$.

Dazu sei

$$B := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |g(x)| \, dx.$$

Dann gilt

$$|b_k| \leq B \ \forall k \in \mathbb{N}$$

und die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} B e^{-k^2 t}$$

ist eine Majorante für

$$\sum_{k=1}^{\infty} B e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} B e^{-k^2 t}$ gleichmäßig in $t \in [\delta,\infty)$ für festes $\delta > 0$ konvergiert, folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} B e^{-k^2 t} \sin(kx)$ gleichmäßig in $(x,t) \in [0,\pi] \times [\delta,\infty)$ konvergiert für jedes $\delta > 0$. Folgerung: $u \in C([0,\pi] \times (0,\infty))$.

ii) Zeige: $u \in C^{2,1}([0,\pi] \times (0,\infty))$.

Betrachte die nach t differenzierte Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} -k^2 \, b_k \, e^{-k^2 t} \, \sin(kx).$$

Sie besitzt die Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} B \, k^2 \, e^{-k^2 t}$, die ebenfalls für $t \in [\delta,\infty)$ gleichmäßig konvergiert. Somit existiert $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ und ist stetig auf $[0,\pi] \times (0,\infty)$, es gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 \, b_k \, e^{-k^2 t} \, \sin(kx).$$

Gleichermaßen folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) && \text{existiert und ist stetig auf } [0,\pi) \times (0,\infty), \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) && \text{existiert und ist stetig auf } [0,\pi) \times (0,\infty), \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 \, b_k \, e^{-k^2 t} \, \sin(kx) && \text{auf } [0,\pi) \times (0,\infty).
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt, dass u die homogene WLG löst. Wegen $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$ gilt weiter

$$\forall t \geq 0: \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

iii) Es bleibt zu zeigen: $u \in C([0,\pi] \times [0,\infty))$ und $u(x,0) = g(x) \,\forall x \in [0,\pi]$.
Sei $S_N(x,t) := \sum_{k=1}^N b_k \, e^{-k^2 t} \sin(kx)$, $x \in [0,\pi], t \geq 0$. S_N löst die homogene WLG.
Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $N_0 = N_0(\varepsilon)$:

$$|g(x) - S_N(x,0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [0,\pi], \forall N \geq N_0$$

und

$$|S_N(x,0) - S_M(x,0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0,\pi], \forall N, M \geq N_0.$$

Die Funktion $S_N(x,t) - S_M(x,t)$ löst ebenfalls die homogene WLG auf $(0,\pi) \times (0,\infty)$. Für $\widetilde{x} \in \{0,\pi\}$ gilt: $S_N(\widetilde{x},t) - S_M(\widetilde{x},t) = 0 \;\forall t \geq 0$. Nach dem Maximumsprinzip (Korollar 4.11) folgt

$$|S_N(x,t) - S_M(x,t)| \leq \varepsilon \quad \forall (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty),$$

d.h. $\big(S_N(x,t)\big)_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig in $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty)$ für $N \to \infty$ und die Grenzfunktion u ist stetig auf $[0,\pi] \times [0,\infty)$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0^+}} u(x,t) = u(x_0,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, \sin(kx_0) = g(x_0).$$

$\square$

Abschließende Bemerkung zur WLG:

Die WLG hat die Eigenschaft „unendlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit“.

Begründung:

a)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Mit Korollar 4.6 und Korollar 4.15 folgt

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\,\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\,t}} \; g(y)\; dy.$$

Sei $g \geq 0, g \not\equiv 0$. Dann gilt $u(x,t) > 0 \,\forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, d.h. etwas Wärme wird sofort ($\forall t > 0$) an jeden von x_0 beliebig weit entfernten Ort transportiert. Dieses Phänomen wir mit dem Begriff „unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit“ beschrieben.

b) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $T > 0$. Betrachte eine Lösung u von

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T. \end{cases}$$

Wähle $g \geq 0$ und die Anfangstemperatur sei irgendwo positiv, d.h.

$$g(\cdot,0) \not\equiv 0.$$

Mit dem Minimumprinzip von Korollar 4.12 folgt $u \geq 0$. Es gilt aber sogar $u > 0$ in Ω_T. Angenommen es existiert $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ mit $u(x_0, t_0) = 0$. Mit dem Minimumprinzip von Satz 4.11 gilt dann $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega}_{t_0}$, insbesondere

$$u(x,0) = g(x,0) = 0 \, \forall x \in \overline{\Omega}. \quad \lightning$$

Folglich gilt also

$$u(x,t) > 0 \, \forall t \in (0,T], \forall x \in \Omega,$$

was ebenfalls zeigt, dass die Wärme sofort (also $\forall t > 0$) jeden Punkt von Ω erreicht.

KAPITEL 5

Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

5.1 Klassifizierung linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition 5.1
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig für $i, j = 1, \ldots, n$. Die PDG

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u}_{=:(L\,u)(x)} = f(x), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

heißt lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Der Operator L heißt linearer Differentialoperator zweiter Ordnung.

Eine reellwertige Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Lösung von (1), falls $u \in C^2(\Omega)$ die Gleichung (1) für alle $x \in \Omega$ erfüllt.

Bemerkung

(i) Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung werden hier nicht betrachtet.

(ii) In manchen Fällen (z.B. bei der Wärmeleitungsgleichung) wird $u \in C^2(\Omega)$ abgeschwächt.

Notation: Mit der $n \times n$ - Matrix $A(x) = \big(a_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^{n}$, den Vektoren

$$b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \nabla u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

und der Hessematrix von u an der Stelle x

$$D^2 u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

schreibt man (1) kurz als

$$(Lu)(x) = \mathrm{spur}\big(\underbrace{A(x)D^2u(x)}_{\text{Matrixprodukt}}\big) + \underbrace{b(x)\cdot\nabla u(x)}_{\text{Skalarprodukt}} + \underbrace{c(x)u(x)}_{\text{Produkt in }\mathbb{R}} = f(x).$$

Beachte:

$$\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(A^TB^T) = \mathrm{spur}(BA) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}.$$

Da die Matrix $D^2u(x)$ symmetrisch ist, gilt:

$$\mathrm{spur}\big(A(x)D^2u(x)\big) = \mathrm{spur}\big(A^T(x)D^2u(x)\big) = \mathrm{spur}\left(\frac{A(x)+A^T(x)}{2}D^2u(x)\right),$$

wobei $\frac{A(x)+A^T(x)}{2}$ der symmetrische Anteil von A ist.

Folgerung: In Definition 5.1 kann man o.B.d.A. annehmen, dass $A(x)$ symmetrisch ist, d.h. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ gilt für alle $i,j = 1,\dots,n$ und alle $x \in \Omega$.

Beispiele

(a)

$$A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(x) = 0,\ c(x) = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow -\Delta u(x) = f(x) \text{ für } x \in \Omega.$$

Dies ist die Poisson- bzw. Laplacegleichung.

(b)

$$A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b(x) = 0,\ c(x) = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x).$$

Umbenennung $t := x_n$ liefert die inhomogene Wellengleichung:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{x_1,\dots,x_{n-1}} u = f(x_1,\dots,x_{n-1},t).$$

(c)

$$A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c(x) = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - -\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} + \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x).$$

Umbenennung $t := x_n$ liefert die inhomogene Wärmeleitungsgleichung:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{x_1,\dots,x_{n-1}} u = f(x_1,\dots,x_{n-1},t).$$

Definition 5.2 (a) *Sei $x \in \Omega$. Die PDG (1) heißt im Punkt x*

i) elliptisch, falls alle Eigenwerte von $A(x)$ positiv oder alle Eigenwerte von $A(x)$ negativ sind,

ii) parabolisch, falls $A(x)$ den Eigenwert 0 hat,

iii) hyperbolisch, falls $A(x)$ $n-1$ positive und 1 negativen Eigenwert hat oder $n-1$ negative und 1 positiven Eigenwert hat.

(b) *(1) heißt elliptisch/ parabolisch/ hyperbolisch in $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, falls (1) in jedem Punkt $x \in \widetilde{\Omega}$ elliptisch/ parabolisch/ hyperbolisch ist.*

Bemerkung Eigenwerte λ von $A(x)$ mit $\dim \mathrm{Kern}(A(x) - \lambda \, \mathrm{Id}) = k$ werden $k-$fach gezählt, z.B. hat die $\mathbb{R}^{n \times n}$-Einheitsmatrix n Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$.

Beispiel Betrachtet man die vorangegangenen Beispiele, so findet man

(a) Laplace/Poissongleichung: elliptisch in Ω

(b) Wellengleichung: hyperbolisch in Ω

(c) Wärmeleitungsgleichung: parabolisch in Ω

Beispiel Die Tricomi-Gleichung ist gegeben durch

$$y \, u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

d.h.

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sie ist

hyperbolisch in der oberen Halbebene $y > 0$,

parabolisch auf der x-Achse $y = 0$,

elliptisch in der unteren Halbebene $y < 0$.

Fragen

(a) Wie verhält sich (1) unter Koordinatentransformation?

(b) Ist die Klassifizierung in Definition 5.2 invariant unter Koordinatentransformation?

Beispiel Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lösung von $u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$. Die DGL ist die Laplacegleichung, also elliptisch. Setze $v(r, \varphi) := u(h(r, \varphi))$ mit $h(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Mit der Kettenregel zeigt man, dass v dann die PDG

$$(*) \qquad v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = 0$$

erfüllt. Ist diese ebenfalls elliptisch? Es gilt

$$\widetilde{A}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

und daher ist (∗) elliptisch in $(0,\infty)\times[0,2\pi)$. Ein Problem gibt es bei $r=0$: Die Umkehrabbildung h^{-1} existiert bei $x_1=x_2=0$ nicht. Außerdem ist

$$Dh(r,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\qquad \text{und } \det Dh(r,\varphi)=r,\ \text{d.h. } \det Dh(0,\varphi)=0.$$

Definition 5.3
Seien $\Omega, D\subset\mathbb{R}^n$ offen . Eine Abbildung $h: D\to\Omega$ heißt C^2-Koordinatentransformation, falls gilt:

i) $h\in C^2(D)$ *und* h *ist bijektiv,*

ii) $h^{-1}\in C^2(\Omega)$,

iii) $Dh(y)$ *ist invertierbar für alle* $y\in D$.

Satz 5.4
Sei $u\in C^2(\Omega)$ Lösung von (1) und $h: D\to\Omega$ eine Koordinatentransformation mit der Umkehrabbildung $g=h^{-1}:\Omega\to D$. Dann löst

$$v:\begin{cases} D\to\mathbb{R}\\ y\mapsto u(h(y))\end{cases}$$

die PDG

$$\sum_{k,l=1}^{n}\widetilde{a}_{kl}(y)\frac{\partial^2 v}{\partial y_k\partial y_l}+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{b}_k(y)\frac{\partial v}{\partial y_k}+\widetilde{c}(y)v=\widetilde{f}(y)\tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_{kl}(y)&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\big(h(y)\big)\frac{\partial g^k}{\partial x_i}\big(h(y)\big)\frac{\partial g^\ell}{\partial x_j}\big(h(y)\big),\qquad \textit{wobei } g=\big(g^1,\dots,g^n\big)^T,\\
\widetilde{b}_k(y)&=\sum_{i=1}^{n}b_i\big(h(y)\big)\frac{\partial g^k}{\partial x_i}\big(h(y)\big)+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\big(h(y)\big)\frac{\partial^2 g^k}{\partial x_i\partial x_j}\big(h(y)\big),\\
\widetilde{c}(y)&=c\big(h(y)\big),\\
\widetilde{f}(y)&=f\big(h(y)\big).
\end{aligned}$$

Kurzschreibweise:

$$(2)\Leftrightarrow \operatorname{spur}\big(\widetilde{A}(y)D^2v(y)\big)+\widetilde{b}(y)\cdot\nabla v(y)+\widetilde{c}(y)v(y)=\widetilde{f}(y)$$

wobei

$$\widetilde{A}(y)=(Dg)\big(h(y)\big)\,A\big(h(y)\big)\,(Dg)^T\big(h(y)\big),\qquad \widetilde{a}_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g^k}{\partial x_i}a_{ij}\frac{\partial g^l}{\partial x_j},$$

$$Dg=\begin{pmatrix}\frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x_n}\end{pmatrix}\qquad \text{(Jacobi-Matrix von } g\text{)}.$$

Beweis. Für $u(x) = v(g(x))$ gilt mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial g^k}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_\ell} \frac{\partial g^k}{\partial x_i} \frac{\partial g^\ell}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial^2 g^k}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_\ell} \frac{\partial g^k}{\partial x_i} \frac{\partial g^\ell}{\partial x_j} + \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial^2 g^k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,k=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial g^k}{\partial x_i} + c(x)v(x)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial g^k}{\partial x_i} \frac{\partial g^\ell}{\partial x_j} \right)}_{\widetilde{a}_{kl}(y),\ x=h(y)} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_\ell} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 g^k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial g^k}{\partial x_i} \right)}_{=\widetilde{b}_k(y)} \frac{\partial v}{\partial y_k} + \widetilde{c}(y)v(y).$$

□

Satz 5.5 (Trägheitssatz von Sylvester)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei invertierbar. Dann haben die Matrizen A und SAS^T dieselbe Anzahl von positiven, negativen und Nulleigenwerten.

Beweis. Vergleiche Hochbruck, Skript zu Numerik I und II, 2013, Satz 6.41 oder

Kühnlein, Skript zur Linearen Algebra, Satz 12.2.9

http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/la1info2012w/media/linearealgebraskript2012.pdf. □

Satz 5.6
Sei $h : D \to \Omega$ eine C^2-Koordinatentransformation. Dann gilt:

$$(1)\ \textit{ist} \left\{ \begin{matrix} \textit{elliptisch} \\ \textit{parabolisch} \\ \textit{hyperbolisch} \end{matrix} \right\} \textit{im Punkt } x = h(y) \in \Omega \ \Leftrightarrow\ (2)\ \textit{ist} \left\{ \begin{matrix} \textit{elliptisch} \\ \textit{parabolisch} \\ \textit{hyperbolisch} \end{matrix} \right\} \textit{im Punkt } y \in D.$$

Beweis. Es gilt:

$$\widetilde{A}(y) = Dg(x)\, A(x)\, Dg(x)^T.$$

Wegen $x = h\big(g(x)\big)$ folgt $\mathrm{Id} = Dh(y)\, Dg(x)$, d.h. $Dg(x)$ ist invertierbar mit $(Dg(x))^{-1} = Dh(y)$. Daher ist der Trägheitssatz von Sylvester anwendbar. □

5.2 Charakteristische Flächenstücke

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to \mathbb{R}$ eine C^k-Funktion ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) mit $\nabla\Phi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Dann bezeichnet man

$$\mathcal{F} = \{x \in U : \Phi(x) = 0\} = \Phi^{-1}(0)$$

als C^k-Flächenstück.

Beispiel

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R} & (C^\infty - \text{Funktion}) \\ x \mapsto |x|^2 - 1 \end{cases}$$

Dann ist $\nabla\Phi(x) = 2x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$.

Parametrisierung von $\mathcal{F}$: Sei $x_0 \in \mathcal{F}$. Es gilt $\nabla\Phi(x_0) \neq 0$. O.B.d.A. sei $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$. Setze $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ und löse in der Nähe des Punktes x_0 die Gleichung $\Phi(x', x_n) = 0$ nach x_n auf. Mit dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert eine Umgebung $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von x_0', und eine Umgebung $H \subset \mathbb{R}$ von $x_{0,n}$ sowie eine C^k-Funktion $\varphi : G \to H$ mit

$$\Phi\big(x', \varphi(x')\big) = 0, \quad \varphi(x_0') = x_{0,n}.$$

Dies liefert eine **lokale** Parametrisierung von $\mathcal{F}$:

$$\Psi : \begin{cases} G \to \mathcal{F} \\ x' \mapsto \big(x', \varphi(x')\big) \end{cases}$$

Die Tangentialebene im Punkt $x_0 = (x_0', \varphi(x_0'))$ wird aufgespannt von $n-1$ linear unabhängigen Vektoren:

$$\text{(3)} \qquad T_{x_0}\mathcal{F} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x_0'), \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_{n-1}}(x_0')\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_0') \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(x_0') \end{pmatrix}\right].$$

Der Normalenvektor im Punkt x_0 ist gegeben durch $\dfrac{\nabla\Phi(x_0)}{|\nabla\Phi(x_0)|}$, denn für $i = 1, \ldots, n-1$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\Phi\big(x', \varphi(x')\big)\big) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\big(x', \varphi(x')\big) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\big(x', \varphi(x')\big)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') \\ &= \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x'), (\nabla\Phi)(x', \varphi(x')) \right\rangle. \end{aligned}$$

Im Punkt x_0 gilt also

$$\frac{\nabla\Phi(x_0)}{|\nabla\Phi(x_0)|} \perp T_{x_0}\mathcal{F}.$$

Definition 5.7
Gegeben ist die PDG (1) auf Ω. Sei $\mathcal{F} = \Phi^{-1}(0)$ ein C^2-Flächenstück mit $\Phi : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \Omega$ offen.

(a) *Im Punkt $x \in U$ heißt die Fläche $\mathcal{F}$ $\left\{\begin{matrix}\text{charakteristisch} \\ \text{nicht-charakteristisch}\end{matrix}\right\}$ für die PDG (1), falls gilt:*

$$(*) \qquad \left\{\begin{matrix} \nabla\Phi(x)^T A(x) \nabla\Phi(x) = 0 \\ \nabla\Phi(x)^T A(x) \nabla\Phi(x) \neq 0 \end{matrix}\right\}.$$

(b) *$\mathcal{F}$ heißt $\left\{\begin{matrix}\text{charakteristisch} \\ \text{nicht-charakteristisch}\end{matrix}\right\}$, falls $\mathcal{F}$ in jedem Punkt $x \in U$ $\left\{\begin{matrix}\text{charakteristisch} \\ \text{nicht-charakteristisch}\end{matrix}\right\}$ ist.*

Beispiele

(a) Die PDG (1) sei elliptisch in Ω. Dann gilt entweder

$$\forall p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ \forall x \in \Omega : p^T A(x) p > 0,$$
$$\forall p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ \forall x \in \Omega : p^T A(x) p < 0.$$

Daraus folgt, dass kein charakteristisches Flächenstück existiert bzw. jedes Flächenstück nicht-charakteristisch ist.

(b) $n = 2$: Betrachte

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad A(x,t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Flächen sind hier also charakteristische Kurven. Um diese charakteristischen Kurven zu finden, gehen wir wie folgt vor. Finde $p \in \mathbb{R}^2$, sodass $p^T A(x) p = 0$ gilt.

$$(p_1, p_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = -p_1^2 + p_2^2 \overset{!}{=} 0, \quad \text{d.h.}$$
$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $(1,1)^T$ ist Normalenvektor auf der Kurve $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x + t = \text{const.} = c\}$ mit $\Phi(x,t) = x + t - c$.

Der Vektor $(1,-1)^T$ ist Normalenvektor auf der Kurve $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x - t = \text{const.} = c\}$ mit $\Phi(x,t) = x - t - c$.

Die charakteristischen Kurven sind also gerade die Parallelen zu den Winkelhalbierenden.

(c) $n = 2$: Betrachte die Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} = 0, A(x,t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hier gilt $p^T A(x) p = 0 \Leftrightarrow p_1 = 0$

Die charakteristischen Kurven sind Parallelen zur $x-$Achse: $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = \text{const.} = c\}$ mit $\Phi(x,t) = t - c$.

Satz 5.8
Gegeben sei die PDG (1) auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $h : D \to \Omega$ sei eine C^2-Koordinatentransformation. $\mathcal{F} = \Phi^{-1}(0)$ mit $\Phi : U \subset \Omega \to \mathbb{R}$ sei ein C^2-Flächenstück. Setzt man $\widetilde{U} = h^{-1}(U)$ und $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ h : \widetilde{U} \subset D \to \mathbb{R}$, so ist $\widetilde{\mathcal{F}} := \widetilde{\Phi}^{-1}(0)$ ebenfalls ein C^2-Flächenstück und es gilt

$$\mathcal{F} \text{ ist } \begin{Bmatrix} \textit{charakteristisch} \\ \textit{nicht-charakteristisch} \end{Bmatrix} \text{ in } x = h(y) \text{ für (1)} \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{F}} \text{ ist } \begin{Bmatrix} \textit{charakteristisch} \\ \textit{nicht-charakteristisch} \end{Bmatrix} \text{ in } y \text{ für (2)}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\widetilde{\mathcal{F}}$ ein C^2-Flächenstück ist.

$\widetilde{\Phi}$ ist als Verkettung von C^2-Funktionen ebenfalls eine C^2-Funktion und $\widetilde{U} = h^{-1}(U)$ ist offen. Mit der Kettenregel gilt:

$$D\widetilde{\Phi} = D\Phi \cdot Dh$$
$$(\ominus) \qquad \nabla\widetilde{\Phi} = (D\widetilde{\Phi})^T = \underbrace{Dh^T}_{\text{invertierbar}} \cdot \underbrace{\nabla\Phi}_{\neq 0} \neq 0.$$

Erinnerung:

$$(\oplus) \qquad \widetilde{A}(y) = Dg(x) A(x) Dg(x)^T, \quad g = h^{-1}, \quad x = h(y), \quad Dg(x) = (Dh(y))^{-1}.$$

Damit gilt:

$$\underbrace{\nabla\widetilde{\Phi}(y)^T}_{\|} \widetilde{A}(y) \nabla\widetilde{\Phi}(y)$$
$$\overset{(\ominus)}{=} \overbrace{\nabla\Phi(x)^T Dh(y)} \left(Dh(y)\right)^{-1} A(x) \underbrace{\left(\left(Dh(y)\right)^{-1}\right)^T Dh(y)^T}_{= \mathrm{Id}} \nabla\Phi(x)$$
$$= \nabla\Phi(x)^T A(x) \nabla\Phi(x).$$

Aus dieser Identität folgt die Behauptung. □

Bedeutung nicht-charakteristischer Flächenstücke

Wir betrachten das Flächenstück $\mathcal{F} = \Phi^{-1}(0)$, mit dem Normalenvektor $\nu(x) = \dfrac{\nabla\Phi(x)}{|\nabla\Phi(x)|}$ und dem von den orthonormalen Vektoren $t_1, \dots, t_{n-1}$ aufgespannten Tangentialraum $T_x\mathcal{F}$, vgl. (3). Wir nehmen an, es sind Funktionen $h_1, h_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ gegeben. Für die PDG (1) interpretieren wir h_1, h_2 als Cauchydaten, d.h.: wir betrachten Lösungen u von (1) mit

$$\begin{cases} u\big|_{\mathcal{F}} = h_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\mathcal{F}} = h_2. \end{cases}$$

Dann sind folgende erste und zweite Ableitungen von u im Punkt $x \in \mathcal{F}$ bekannt, bzw. durch h_1, h_2 bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_i}(x) &= \frac{\partial h_1}{\partial t_i}(x), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j}(x) &= \frac{\partial^2 h_1}{\partial t_i \partial t_j}(x), \quad i, j = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial t_i}(x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial \nu}(x) = \frac{\partial h_2}{\partial t_i}(x), \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Um $D^2u(x)$ vollständig zu bekommen, fehlt $\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x)$.

Bemerkung Wie sind die tangentialen Ableitungen von h_1, h_2 zu verstehen? Hier eine vereinfachte Antwort. Wir betrachten eine Funktion $h : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ und nehmen an, dass h in eine offene Umgebung von $x \in \mathcal{F}$ als C^1-Funktion fortgesetzt ist. Dann ist

$$\frac{\partial h}{\partial t_i}(x) = \nabla h(x) \cdot t_i \text{ und } \frac{\partial^2 h}{\partial t_i \partial t_j}(x) = t_i^T D^2 h(x) t_j.$$

Dann stellt man fest, dass die Ausdrücke nicht davon abhängen, wie h ausserhalb von $\mathcal{F}$ fortgesetzt wurde.

Frage: Ist $\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x)$ durch die PDG (1) bestimmbar?

Antwort:

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x) \text{ durch die PDG bestimmbar } \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ ist nicht charakteristisch im Punkt } x.$$

Beispiel $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $(\star)$ $u_{xy} = f(x, y)$. Dann ist

$$A(x, y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(x, y) = 0, \quad c(x, y) = 0.$$

Wegen

$$p^T A(x, y)\, p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 \cdot p_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } p = \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

sind die charakteristischen Kurven gegeben durch

$$\{(x, y) : x = \text{const.}\} \text{ oder } \{(x, y) : y = \text{const.}\}.$$

Angenommen

$$\begin{aligned}
u(x,0) = h_1(x) \text{ ist gegeben,} \quad & \text{dann ist bekannt:} \quad && \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = h_1'(x),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,0) = h_1''(x),\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = h_2(x) \text{ ist gegeben,} \quad & \text{dann ist bekannt:} \quad && \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,0) = h_2'(x),\\
& \text{die DGL liefert:} \quad && \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,0) \overset{(\star)}{=} f(x,0).\\
\text{Aber:} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = ?
\end{aligned}$$

Die Ableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0)$ ist nicht bestimmbar. Der Grund ist, dass die Cauchydaten auf einer charakteristischen Kurve gegeben sind.

Begründung der Behauptung ($*$)

Es sei $t_n := \nu(x)$, d.h. eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $\{t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$. Dann gilt für $A(x)$ folgende Basisdarstellung (bzgl. der Matrixbasis $t_i t_j^T$):

$$A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{(t_i^T A(x) t_j)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{t_i t_j^T}_{n \times n-\text{Matrix}}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{spur}\big(A(x) D^2 u\big) &= \sum_{i,j=1}^{n} (t_i^T\, A(x)\, t_j) \underbrace{\operatorname{spur}(t_i\, t_j^T D^2 u(x))}_{= t_i^T\, D^2 u(x) t_j}\\
&= \big(\nu^T\, A(x)\, \nu\big) \nu^T\, D^2 u(x)\, \nu\\
&\quad + \text{ auf } \mathcal{F} \text{ bekannte Terme, die } \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial t_i},\ \ i,j = 1, \ldots, n-1 \text{ beinhalten.}
\end{aligned}$$

Auf $\mathcal{F}$ sind $b(x) \cdot \nabla u$ und $c(x) u$ ebenfalls durch h_1 und h_2 gegeben. Damit ist $\nu(x)^T D^2 u(x) \nu(x)$ aus der PDG (1) genau dann bestimmbar, wenn der Vorfaktor $\nu(x)^T A(x) \nu(x) \neq 0$ ist, d.h. wenn $\mathcal{F}$ nicht charakteristisch im Punkt x ist.

5.3 Eine Variante des Satzes von Cauchy und Kowalewskaja

Idee für die Lösung des Cauchyproblems zur PDG (1):

- Auf einer nicht-charakteristischen Fläche $\mathcal{F} = \Phi^{-1}(0)$ werden Cauchy-Daten vorgegeben: $u\big|_{\mathcal{F}} = h_1$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\mathcal{F}} = h_2$.
- Um einen Punkt $x_0 \in \mathcal{F}$ wird u als Taylorreihe geschrieben.
- Die Taylorkoeffizienten werden sukzessive aus der PDG (1) und mit Hilfe von h_1, h_2 bestimmt.

Reell-analytische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt reell-analytisch im Punkt $x_0 \in \Omega$, falls eine Kugel $B_r(x_0) \subset \Omega$ existiert und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ Koeffizienten $c_\alpha \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha (x - x_0)^\alpha \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

wobei

$$(x-x_0)^\alpha = (x_1-x_{0,1})^{\alpha_1}(x_2-x_{0,2})^{\alpha_2}\cdots(x_n-x_{0,n})^{\alpha_n}.$$

Satz 5.9 (Eine Variante des Satzes von Cauchy und Kowalewskaja)
Gegeben sei die PDG (1) auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F} = \Phi^{-1}(0) \subset \Omega$ sei eine nicht-charakteristische Fläche, die im Punkt $x_0 \in \mathcal{F}$ reell-analytisch ist. Es seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $h_1, h_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ reell-analytisch im Punkt x_0. Dann existiert eine Kugel $B_r(x_0) \subset \Omega$ und eine in x_0 reell-analytische Funktion $u : B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ mit:

a) u löst die PDG (1) in $B_r(x_0)$

b) u erfüllt die Cauchy-Bedingungen:

$$\begin{cases} u\big|_{\mathcal{F}\cap B_r(x_0)} = h_1\big|_{\mathcal{F}\cap B_r(x_0)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\mathcal{F}\cap B_r(x_0)} = h_2\big|_{\mathcal{F}\cap B_r(x_0)} \end{cases}.$$

Bemerkungen

(a) Unter dem Namen „Satz von Cauchy-Kowalewskaja“ findet man in der Literatur einen ähnlichen Satz für sehr viel allgemeinere PDGen.

(b) Ein Flächenstück wird als reell-analytisch bezeichnet, wenn eine reell-analytische Parametrisierung der Fläche existiert.

Beweisidee:

Benutze eine reell-analytische Koordinatentransformation $h : D \to \widetilde{\Omega} \subset \Omega$ mit $x_0 \in \widetilde{\Omega}$, wobei $\mathcal{F} \cap \widetilde{\Omega}$ übergeht in $\widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{\Phi}^{-1}(0) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\}$, $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ h$. Dabei geht die PDG (1) in die PDG (2) über. Da $\mathcal{F}$ nicht-charakteristisch ist für (1) ist auch $\widetilde{\mathcal{F}}$ nicht-charakteristisch für (2) und es gilt

$$\text{b)} \begin{cases} u\big|_{\mathcal{F}\cap\widetilde{\Omega}} = h_1\big|_{\mathcal{F}\cap\widetilde{\Omega}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\mathcal{F}\cap\widetilde{\Omega}} = h_2\big|_{\mathcal{F}\cap\widetilde{\Omega}} \end{cases} \quad \text{geht über in} \quad \widetilde{\text{b)}} \begin{cases} v(y_1,\dots,y_{n-1},0) = \widetilde{h}_1(y_1,\dots,y_{n-1}) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y_n}(y_1,\dots,y_{n-1},0) = \widetilde{h}_2(y_1,\dots,y_{n-1}). \end{cases}$$

Da $\widetilde{\mathcal{F}}$ nicht-charakteristisch ist $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 v}{\partial y_n^2}(y_1,\dots,y_{n-1},0)$ ist aus (2) bestimmbar.

Damit ist das Taylorpolynom 2. Ordnung von v im Punkt $y_0 \in \mathcal{F}$ bestimmt. Differenziere nun die PDG (2) nach $y_1, ..., y_n$ und $\widetilde{\text{b)}}$ nach $y_1, \dots, y_{n-1}$. Dann ist das Taylorpolynom 3. Ordnung bestimmbar im Punkt y_0. Weitere Differentiation liefert höhere Taylorterme. Definiere nun:

$$v(y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha (y-y_0)^\alpha.$$

Zeige (hier liegt die Hauptschwierigkeit): Die Reihe konvergiert in einer Umgebung von y_0 und löst (2).

Rücktransformation zu $u := v \circ g$ ergibt die Lösung des ursprünglichen Problems und damit die Behauptung.

Beispiel Betrachte die Wellengleichung bzw. Poissongleichung:

$$u_{tt} \mp u_{xx} = f(x,t).$$

Die x-Achse $\mathcal{F} = \{(x,t) : t = 0\}$ ist sowohl für den hyperbolischen als auch für den elliptischen Fall nicht-charakteristisch.

Vorgegeben seien auf $\mathcal{F}$ die Cauchy-Daten:

$$\text{(CD)} \qquad \begin{cases} u(x,0) = h_1(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h_2(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wir bestimmen (zur Illustration der obigen Beweisskizze) die Taylorentwicklung bis zur Ordnung 3 im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

Die Ableitungen bis Ordnung 2 sind bereits durch die PDG und die Cauchydaten bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} &u_x(x,0) = h_1'(x), \quad u_{xx}(x,0) = h_1''(x), \\ &u_{tx}(x,0) = h_2'(x), \\ &u_{tt}(x,0) \overset{\text{PDG}}{=} \pm u_{xx}(x,0) + f(x,0) = \pm h_1''(x) + f(x,0) \end{aligned}\right\} \text{ liefert Taylorkoeffizienten bis Ordnung 2.}$$

Differentiation der PDG nach x, t ergibt:

$$\begin{aligned} u_{ttt} \mp u_{xxt} &= f_t(x,t) \\ u_{ttx} \mp u_{xxx} &= f_x(x,t). \end{aligned}$$

Aus den Cauchydaten kann man folgende 3. Ableitungen im Entwicklungspunkt (0,0) durch Differenzieren erhalten:

$$\begin{aligned} &u_{xxx}(0,0) = h_1'''(0), \\ &u_{xxt}(0,0) = u_{txx}(0,0) = h_2''(0). \end{aligned}$$

Aus der abgeleiteten PDG erhält man:

$$\begin{aligned} u_{xtt}(0,0) &= \pm u_{xxx}(0,0) + f_x(0,0) = \pm h_1'''(0) + f_x(0,0) \\ u_{ttt}(0,0) &= \pm u_{txx}(0,0) + f_t(0,0) = \pm h_2''(0) + f_t(0,0). \end{aligned}$$

Damit sind alle Ableitungen bis zur Ordnung 3 explizit bestimmt worden.

Wir entwicklen das Beispiel nun weiter und betrachten dazu konkret $f \equiv 0, h_1 \equiv 0$ und $h_2(x) = \frac{\sin(kx)}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Die Werte der Ableitungen bis Ordnung 3 sind im Nullpunkt für den hyperbolischen sowie den elliptischen Fall dieselben:

$$\begin{aligned} &u(0,0) = 0, \quad u_x(0,0) = 0, \quad u_{xx}(0,0) = 0, \quad u_{xxx}(0,0) = 0, \\ &\qquad u_t(0,0) = 0, \quad u_{tt}(0,0) = 0, \quad u_{ttt}(0,0) = 0, \\ &\qquad\qquad u_{xt}(0,0) = 1, \quad u_{xxt}(0,0) = 0, \quad u_{xtt}(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Somit gilt in beiden Fällen die Darstellung

$$u(x,t) = x\,t + \mathcal{O}(|(x,t)|^4) \text{ für } (x,t) \to (0,0).$$

Auf den ersten Blick scheint sich vom Standpunkt der analytischen Entwicklungen der Lösung der hyperbolische Fall vom elliptischen Fall nicht wesentlich zu unterscheiden. Es gibt aber einen gravierenden Unterschied, den wir nun beleuchten, indem wir zuerst die Lösungen explizit bestimmen.

Bestimmung der exakten Lösung: Mit dem Ansatz der Trennung der Veränderlichen

$$u(x,t) = a(x)\, b(t).$$

Einsetzen in PDG liefert

$$u_{tt}(x,t) \mp u_{xx}(x,t) = a(x)b''(t) \mp a''(x)b(t) = 0$$
$$\overset{a(x),b(t)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{b''(t)}{b(t)} = \pm \frac{a''(x)}{a(x)} = \text{const.}$$

Einsetzen der Cauchy-Daten

$$u(x,0) = a(x)\, b(0) = 0$$
$$u_t(x,0) = a(x)b'(0) = \frac{\sin kx}{k}$$

Es muss also $b(0) = 0$ gelten und o.B.d.A können wir $b'(0) = 1$ annehmen. Dann ist $a(x) = \frac{\sin kx}{k}$ und $\frac{a''(x)}{a(x)} = -k^2$. Damit können wir nun $b(t)$ bestimmen und erhalten

$$b(t) = \frac{1}{k}\sin(kt), \qquad \text{(hyperbolischer Fall)}$$
$$b(t) = \frac{1}{k}\sinh(kt), \quad \text{(elliptischer Fall)}$$

Lösung:

$$u(x,t) = \frac{\sin(kx)\sin(kt)}{k^2} \quad \xrightarrow[k\to\infty]{\text{gleichmäßig}} 0$$
$$u(x,t) = \frac{\sin(kx)\sinh(kt)}{k^2} \quad \text{divergiert für } k \to \infty \text{ falls } t > 0.$$

Im elliptischen Fall hängt die Lösung nicht stetig von h_1, h_2 ab, denn obwohl die Cauchydaten für $k \to \infty$ gegen 0 streben, konvergiert die Lösung nicht gegen 0 – sie explodiert sogar. „Das elliptische Cauchy-Problem ist kein wohlgestelltes Problem“.

Im hyperbolischen Fall hätten wir auch die Lösungsformel von d'Alembert (Kapitel 2, Gleichung (4)) benutzen können:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(h_1(x+t) + h_1(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h_2(\tau)\, d\tau.$$

Man sieht sehr gut, dass die Lösung stetig von h_1, h_2 abhängt. Ausserdem erhält man durch Einsetzen von $h_1 = 0$ und $h_2 = \frac{\sin kx}{k}$ auch direkt die gerade berechnete Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2k^2}\big(\cos k(x-t) - \cos k(x+t)\big) = \frac{\sin kx \sin kt}{k^2}.$$

Bemerkung zu Satz 5.9

- Cauchy-Problem für Laplace- bzw. Poissongleichung
  - (a) analytische Daten führen zu analytischen Lösungen
  - (b) keine Wohlgestelltheit
  - (c) gibt man Cauchy-Daten auf einem Flächenstück $\mathcal{F}$ vor, so kann man i. A. die physikalisch sinnvolleren vorgegebenen Randdaten auf $\partial\Omega$ nicht mehr erreichen.

- Cauchy-Problem für Wellengleichung: Vorgabe von $u(x,0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ führt zu wohlgestelltem Problem.
- Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t)$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$:

  Die Vorgabe von $u(x,0)$ führt zur Lösungsformel, vgl. Kapitel 4. Der Satz 5.9 ist nicht anwendbar, da $\mathcal{F} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ charakteristisch ist. Die Lösungen aus Kapitel 4 sind i.A. auch nicht analytisch, d.h. i.A. existieren gar keine analytischen Lösungen. Siehe dazu auch das folgende Beispiel.

Beispiel Betrachte

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gemäß Satz 4.4 hat die Lösung die Form:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \frac{1}{1+y^2}\, dy.$$

Behauptung: Es gibt keine analytische Lösung in der Umgebung von $(x_0,t_0) = (0,0)$, bzw. $(x_0,t_0) = (x_0,0)$.

Angenommen u besitzt für $(x,t) \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ die Taylorentwicklung um $(0,0)$ mit

$$u(x,t) = \sum_{k,\ell}^{\infty} a_{kl}\, x^k\, t^\ell = \sum_{k,\ell}^{\infty} \frac{b_{k\ell}}{k!\ell!}\, x^k\, t^\ell.$$

Dann liefert das Einsetzen in die WLG Bedingungen an die Koeffizienten b_{kl}:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \sum_{k,\ell}^{\infty} \frac{b_{k\ell}}{k!\ell!} k(k-1)\, x^{k-2}\, t^\ell = \sum_{k,\ell}^{\infty} \frac{b_{k+2,\ell}}{k!\ell!}\, x^k\, t^\ell \\ u_t &= \sum_{k,\ell}^{\infty} \frac{b_{k\ell}}{k!\ell!} \ell\, x^k\, t^{\ell-1} = \sum_{k,\ell}^{\infty} \frac{b_{k,\ell+1}}{k!\ell!}\, x^k\, t^\ell \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die notwendige Bedingung $b_{k+2,\ell} = b_{k,\ell+1}$, $k,\ell \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt für $t = 0, |x| < 1$:

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{k,0}}{k!}\, x^k = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{2k}.$$

Ein erneuter Koeffizientenvergleich liefert:

$$b_{2k+1,0} = 0,\; b_{2k,0} = (2k)!(-1)^k.$$

Für Koeffizienten mit ungeradem $k-$Index gilt: $b_{2k+1,\ell} = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$. Für die Koeffizienten mit geradem $k-$Index gilt:

$\ell \setminus 2k$	0	2	4	6	8
0	1	-2!	4!	-6!	8!
1	-2!	4!	-6!	8!	...
2	4!	-6!	8!	...	
3	-6!	8!	...		

Also ist $b_{2k,\ell} = b_{2(k+\ell),0} = (-1)^{k+\ell}(2k+2\ell)!$ und $b_{2k+1,\ell} = 0$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$.

Wir halten das folgende **Zwischenergebnis** fest: Falls eine analytische Lösung existiert, dann hat sie die Gestalt:

$$u(x,t) = \sum_{k,\ell}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \frac{(2k+2\ell)!}{(2k)!\ell!} x^{2k} t^{\ell}.$$

Nun schätzen wir die Reihenglieder ab. Dabei betrachten wir zwei Fälle:

$x = 0$:

$$u(0,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \underbrace{\frac{(2\ell)!}{\ell!}}_{\geq \ell!} t^{\ell}.$$

Wenn wir die Abschätzung $2\ell! \geq (\ell!)^2$ verwenden und das aus Analysis I bekannte Resultat $\ell! t^{\ell} \xrightarrow{\ell \to \infty} \infty$ für $t > 0$, so folgt, dass die Reihenglieder für $l \to \infty$ nicht gegen 0 streben. Somit divergiert die Reihe für $x = 0$ und $t > 0$.

$x \neq 0$:

$$u(x,t) = \sum_{k,\ell}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \frac{(2k+2\ell)!}{(2k)!\ell!} x^{2k} t^{\ell}.$$

Es gilt $(*) \quad (2k+2\ell)! \geq (2k)!(\ell!)^2$. Der Beweis hierfür erfolgt per Induktion. Für $k = 0$ gilt wie oben:

$$(2\ell!) \geq (\ell!)^2,$$

$k \hookrightarrow k+1$:

$$(2k+2+2\ell)! = (2k+2+2\ell)(2k+1+2\ell)(2k+2\ell)! \overset{I.V.}{\geq} \underbrace{(2k+2)(2k+1)(2k)!}_{(2k+2)!}(\ell!)^2.$$

Mit $(*)$ gilt daher die Abschätzung

$$\frac{(2k+2\ell)!}{(2k)!\ell!} x^{2k} t^{\ell} \quad \overset{(*)}{\geq} \quad \ell! t^{\ell} x^{2k} \qquad \xrightarrow[x \neq 0, t > 0]{\ell \to \infty} \infty,$$

d.h. die Reihe konvergiert ausschließlich für $x = 0$, $t = 0$.

Damit ist gezeigt, dass es keine in der Umgebung von $x = 0, t = 0$ analytische Lösung gibt, bzw. dass die durch Satz 4.4 gegebene Lösung nicht analytisch bei $x = 0, t = 0$ ist.

ANHANG A

Zusammenfassungen

A.1 Zusammenfassung: Gaußscher Integralsatz

Definition 1
Eine offene, zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^1-Gebiet (Lipschitz-Gebiet), falls für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ ein Radius $r > 0$ und eine C^1-Funktion (Lipschitz-Funktion) $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ existiert, so daß (nach einer geeigneten Bewegung des Koordinatensystems) gilt:

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x = (x', x_n) \in B_r(x_0) : x_n > \phi(x')\}.$$

Es gilt dann notwendigerweise

$$\partial\Omega \cap B_r(x_0) = \{x = (x', x_n) \in B_r(x_0) : x_n = \phi(x')\}.$$

Für $x = (x', \phi(x')) \in \partial\Omega \cap B_r(x_0)$ heißt der Vektor

$$\nu(x) = \frac{(\nabla\phi(x'), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\phi(x')|^2}}$$

äußerer Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$ im Punkt x. Im Fall eines Lipschitz-Gebietes existiert der äußere Einheitsnormalenvektor ν f.ü. bzgl. des Oberflächenmaßes auf $\partial\Omega$.

Satz 2 (Gaußscher Integralsatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und sei ν der Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$. Dann gilt

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \oint_{\partial\Omega} f \nu_i \, do$$

für jede Funktion $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Das Resultat gilt auch, falls Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist.

Oft erscheint der Gaußsche Integralsatz in folgender Form:

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \oint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, do,$$

wobei $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld ist. Die Komponentenfunktionen von $F = (F_1, \ldots, F_n)$ sollen dann $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$ für $i = 1, \ldots, n$ erfüllen.

Lemma 3 (Greensche Identitäten)
Seien $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u \, dx &= \oint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \, do, \\
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= -\int_\Omega u \Delta v \, dx + \oint_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \nu \, do, \\
\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dx &= \oint_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \nu \, do.
\end{aligned}$$

A.2 Zusammenfassung: Oberflächenintegrale

Die Definitionen 1 bis 4 finden sich im Kurzskript zu meiner Vorlesung Analysis 3.

Definition 1 ($n-1$-dimensionales Flächenstück im $\mathbb{R}^n$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Die Abbildung $\psi : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ besitze folgende Eigenschaften:

(i) ψ sei injektiv, stetig differenzierbar in G,

(ii) ψ sei Lipschitzstetig auf $\overline{G}$,

(iii) Rang$(D\psi) = n-1$ in G,

(iv) $\psi(G)$, $\psi(\partial G)$ seien disjunkt.

Dann heißt $F = \psi(G)$ offenes $n-1$-dimensionales Flächenstück mit Parametrisierung ψ.

Definition 2
$F = \psi(G)$ sei $n-1$-dimensionales Flächenstück im $\mathbb{R}^n$ mit Parametrisierung $\psi = \psi(\underbrace{x_1, \ldots, x_{n-1}}_{=:x'})$. Dann heißt die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(g_{ij}(x'))_{i,j=1}^{n-1}$ gebildet durch

$$g_{ij}(x') = \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x') \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x')}_{\text{Skalarprodukt im } \mathbb{R}^n}, \quad i,j = 1, \ldots, n-1$$

metrischer Tensor von F im Punkt $x' \in G$. Es stellt sich heraus, dass die Matrix $\big(g_{ij}(x')\big)_{i,j=1}^{n-1}$ positiv definit ist.

Definition 3 (Inhalt eines $n-1$-dimensionalen Flächenstücks)
Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ offenes $n-1$-dimensionales Flächenstück im $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$|F| := \int_G \sqrt{\det\big(g_{ij}(x')\big)}\ dx'$$

$n-1$-dimensionaler Inhalt des Flächenstückes F.

Definition 4 (Integral über $n-1$-dimensionale Flächenstücke)
Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ $n-1$-dimensionales Flächenstück mit Parametrisierung $\psi : G \to F$ und $f : F \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Dann heißt

$$\oint_F f\ d\sigma := \int_G f(\psi(x'))\sqrt{\det\big(g_{ij}(x')\big)}\ dx'$$

Integral von f über F (die Existenz des $n-1$-dimensionalen Lebesgue-Integrals über G muß hierbei vorausgesetzt werden).

Bemerkungen: Es gilt festzustellen, daß

(1) $|F|$ und $\displaystyle\oint_F f\ d\sigma$ unabhängig von der Parametrisierung sind,

(2) $|F|$ invariant bzgl. Bewegungen des $\mathbb{R}^n$ ist.

Spezialfälle:

- $n = 3$, $\det\big(g_{ij}(x')\big) = \left| \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \times \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^2$.
- $n \geq 2$, ψ ist ein Graph $\psi(x') = \big(x_1, \dots, x_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_{n-1})\big)$. In diesem Fall ist
$$\det\big(g_{ij}(x')\big) = 1 + |\nabla\phi(x')|^2.$$

Manche Flächen lassen sich nur mühsam (bzw. gar nicht) als Flächenstücke im Sinne der Definition 1 beschreiben. Deshalb betrachtet man auch Flächen, die durch Flächenstücke zusammengesetzt sind. Auf diesen Flächen kann man einen Integralbegriff definieren. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$, so bezeichnet $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion der Menge A.

Definition 5
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $F_i = \psi_i(G_i) \subset \partial\Omega$, $i = 1, \dots, K$ endlich viele Flächenstücke gemäß Definition 1 mit $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^K F_i$. Die Funktionen $\eta_i : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, K$ seien wie folgt definiert:

$$\eta_1 := \chi_{F_1}, \quad \eta_2 := \chi_{F_2 \setminus F_1}, \quad \eta_3 := \chi_{F_3 \setminus (F_1 \cup F_2)}, \dots, \quad \eta_K := \chi_{F_K \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_{K-1})}.$$

Dann heißen die Funktionen $\eta_1, \dots, \eta_K$ Zerlegung der 1.[1] *Es gilt*

$$\sum_{i=1}^K \eta_i = 1 \text{ auf } \partial\Omega, \quad \sum_{i=1}^K f\eta_i = f \text{ auf } \partial\Omega, \text{ falls } f : \partial\Omega \to \mathbb{R}.$$

Nun definiert man
$$\oint_{\partial\Omega} f \, d\sigma := \sum_{i=1}^K \oint_{F_i} f\eta_i d\sigma,$$

wobei $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ so zu wählen ist, dass die Integrale $\displaystyle\oint_{F_i} f\eta_i d\sigma$ für $i = 1, \dots, K$ gemäß Definition 4 existieren.

[1] Oftmals verlangt man für eine Zerlegung der 1 mehr: die η_i sollen C^∞-Funktionen sein.

A.3 Zusammenfassung: Vertauschung von Grenzübergängen

Sätze basierend auf dem Prinzip der gleichmäßigen Konvergenz/gleichmäßigen Stetigkeit

Lemma 1
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen, beschränkt und $w, w_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, seien stetig und beschränkt. Falls $w_k \to w$ gleichmäßig in Ω, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega w_k \, dx = \int_\Omega w \, dx.$$

Lemma 2
Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, Ω_2 beschränkt und $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann ist

$$v : \begin{cases} \Omega_1 \to \mathbb{R}, \\ \quad x \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} u(x,y)\, dy \end{cases}$$

(gleichmäßig) stetig.

Beweis: Stetigkeit folgt z.B. aus Lemma 1, denn für $x_k \to \bar{x} \in \Omega_1$ gilt: $w_k(y) := u(x_k, y)$, $y \in \Omega_2$ konvergiert für $k \to \infty$ auf Ω_2 gleichmäßig gegen $w(y) := u(\bar{x}, y)$, $y \in \Omega_2$. Alternativ: man nutzt, daß zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|u(x,y) - u(\tilde{x}, \tilde{y})| \le \varepsilon$ falls $|x - \tilde{x}|, |y - \tilde{y}| \le \delta$. Damit gilt

$$|v(x) - v(\tilde{x})| \le \int_{\Omega_2} |u(x,y) - u(\tilde{x}, y)|\, dy \le \varepsilon |\Omega_2| \text{ falls } |x - \tilde{x}| \le \delta.$$

Auf diese Weise erhält man auch die gleichmäßige Stetigkeit von v. $\square$

Lemma 3
Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, Ω_2 beschränkt und $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann ist

$$v : \begin{cases} \Omega_1 \to \mathbb{R}, \\ \quad x \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} u(x,y)\, dy \end{cases}$$

stetig partiell nach x_i differenzierbar auf Ω_1 und es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y)\, dy.$$

Beweis: Sei $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann gibt es für $\bar{x} \in \Omega_1$ und $y \in \Omega_2$ nach dem Mittelwertsatz ein $\tilde{h}_k$, welches von $\bar{x}, y$ abhängt, mit $|\tilde{h}_k| \le |h_k|$ und

$$\frac{u(\bar{x} + h_k e_i, y) - u(\bar{x}, y)}{h_k} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x} + \tilde{h}_k e_i, y).$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ gilt

$$\left| \frac{u(\bar{x} + h_k e_i, y) - u(\bar{x}, y)}{h_k} - \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}, y) \right| \le \varepsilon \text{ für alle } y \in \Omega_2 \text{ falls } k \ge k_0.$$

Nun gilt

$$\left|\frac{v(\bar{x}+h_k e_i)-v(\bar{x})}{h_k}-\int_{\Omega_2}\frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x},y)\,dy\right| \leq \int_{\Omega_2}\left|\frac{u(\bar{x}+h_k e_i,y)-u(\bar{x},y)}{h_k}-\frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x},y)\right|\,dy$$
$$\leq \varepsilon|\Omega_2|$$

falls $k \geq k_0$. □

Bemerkung: Die gleichmäßige Stetigkeit von $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ ist gewährleistet, wenn z.B. Ω_1, Ω_2 beschränkt sind und $u : \overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}$ stetig ist. Gleiches gilt für die gleichmäßige Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Sätze basierend auf dem Prinzip der majorisierten Konvergenz

Lemma 4
Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ messbar und $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingungen

(C1) für alle $x \in \Omega_1$ ist die Funktion $y \mapsto u(x,y)$ messbar auf Ω_2

(C2) für fast alle $y \in \Omega_2$ ist die Funktion $x \mapsto u(x,y)$ stetig auf Ω_1

sowie die Bedingung

(M) $\exists g \in L^1(\Omega_2)$ mit $|u(x,y)| \leq g(y)$ für alle $x \in \Omega_1$ und fast alle $y \in \Omega_2$.

Dann existiert

$$v : \begin{cases} \Omega_1 \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto \int_{\Omega_2} u(x,y)\,dy \end{cases}$$

und ist stetig in x auf Ω_1.

Beweis: Folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz. □

Lemma 5
Sei $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ messbar und $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ sei für alle $x \in \Omega_1$ und fast alle $y \in \Omega_2$ partiell nach x_i differenzierbar. Falls $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ die Bedingungen (C1), (C2), (M) von Lemma 4 erfüllen, dann ist

$$v : \begin{cases} \Omega_1 \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto \int_{\Omega_2} u(x,y)\,dy \end{cases}$$

stetig partiell nach x_i differenzierbar auf Ω_1 und es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y)\,dy.$$

Beweis: Sei $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann gibt es für $\bar{x} \in \Omega_1$ und fast alle $y \in \Omega_2$ nach dem Mittelwertsatz ein $\tilde{h}_k$, welches von $\bar{x}, y$ abhängt, mit $|\tilde{h}_k| \leq |h_k|$ und

$$\frac{u(\bar{x}+h_k e_i,y)-u(\bar{x},y)}{h_k} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}+\tilde{h}_k e_i,y).$$

Nun gilt

$$\left|\frac{v(\bar{x}+h_k e_i)-v(\bar{x})}{h_k}-\int_{\Omega_2}\frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x},y)\,dy\right| \leq \int_{\Omega_2}\underbrace{\left|\frac{u(\bar{x}+h_k e_i,y)-u(\bar{x},y)}{h_k}-\frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x},y)\right|}_{\leq 2g(y)}\,dy$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz existiert der Limes $k \to \infty$ und kann berechnet werden, indem der Limes $k \to \infty$ unter das letzte Integral gezogen wird. □