Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis
JProf. Dr. Xian Liao

Englerstrasse 2, Geb. 20.30
76131 Karlsruhe

Telefon: +49 (0) 721/608-42616
Fax: +49 (0) 721/608-46530
E-Mail: xian.liao@kit.edu
Web: www.math.kit.edu/iana2/~liao

Datum: 21. Juli 2021

Skript zur

Vorlesung (SS210157500): Rand- und Eigenwertprobleme [1]

[1] Dieses kurze Skript ist noch unvollständig, und ist nur für Kursteilnehmer (SS210157500) am Karlsruhe Institut für Technologie, Sommersemester 2021. Korrekturen können gerne an mich gesendet werden.

Inhaltsverzeichnis

[13.04.2021]

1 Rand- und Eigenwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen

In diesem Kapitel betrachten wir die Rand- und Eigenwertaufgaben für die gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir werden in Sektion 1.1 ein inspirierendes Beispiel über die Bewegung einer Feder geben. Nach der kurzen Erinnerung an die Existenztheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen in Sektion 1.2 werden wir einen Alternativensatz sowie einen (rigoroseren) Rückblick auf das Randwertproblem des Federmodels in Sektion 1.3 geben. In Sektion 1.4 werden wir die Greensche Funktion konstruieren, und dadurch wird eine Darstellungsformel von der Lösung der Randwertaufgabe gegeben. Zum Ende werden wir das Sturm-Liouville-Problem in Sektion 1.5 betrachten.

1.1 Beispiel: Bewegung einer Feder

Newton-Mechanik In der klassischen Newton-Mechanik wird ein Teilchen durch einen Punkt im Raum $\mathbb{R}^3$ beschrieben, dessen Position durch eine Funktion

$$\vec{x} = \vec{x}(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$$

gegeben ist. Die Ableitung der Funktion $\vec{x}(t)$ bzgl. der Zeitvariable

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$$

heißt die Geschwindigkeit des Teilchens und die Ableitung der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$$

heißt die Beschleunigung des Teilchens. Es gibt normalerweise eine äußere Kraft

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3,$$

so dass dieses Teilchen sich in diesem externen Kraftfeld bewegt. Das newtonsche Kraftgesetz sagt, dass die auf das Teilchen wirkende Kraft gleich der Beschleunigung mal der Masse m sein muss:

$$\vec{f}(\vec{x}(t)) = m \cdot \vec{a}(t), \text{ wobei } \vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t).$$

Zum Beispiel schauen wir uns an Bewegung eines Steins, der auf die Erde fällt. In der Nähe der Oberfläche der Erde ist die auf den Stein wirkende Gravitationskraft ungefähr konstant und gegeben durch

$$\vec{f}(\vec{x}) = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist g eine positive Konstante und die x_3-Richtung wird als normal zur Oberfläche angenommen. Daher lautet unser Differentialgleichungssystem

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

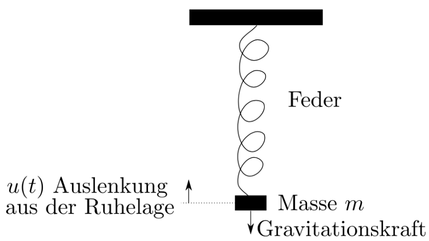
Unter der Annahme der Anfangsdaten

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$$

können wir einfach das Anfangswertproblem dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen lösen:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2.$$

Modellierung einer Feder Jetzt betrachten wir die Bewegung einer Feder im Gravitationskraftfeld.



Wir können uns in einem eindimensionalen Fall einschränken, und die Funktion

$$u = u(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

bezeichnet die Auslenkung aus der Ruhelage. Mit Hooke'schen Gesetz gibt es eine zusätzliche auf die Feder wirkende Kraft

$$H = H(u) = -D \cdot u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

falls die Feder um eine Strecke u aus der Ruhelage ausgelenkt wird. Hier ist $D > 0$ die Federkonstante. Newtonsches Kraftgesetz gibt die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{u}(t) = -D \cdot u(t) - m \cdot g.$$

Allgemeinerer lautet es mit $\omega = \sqrt{D/m}$,

$$-\ddot{u}(t) = \omega^2 u(t) + r(t). \tag{1.1}$$

Hier ist $r(t)$ gegeben, und $m \cdot r(t)$ bezeichnet eine allgemeine äußere Kraft (z.B. $m \cdot r(t) = mg$ falls die äußere Kraft die Gravitationskraft ist).
Wir lösen jetzt die lineare gewöhnliche Differentialgleichung (1.1). Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$-\ddot{u}(t) = \omega^2 u(t) \tag{1.2}$$

lautet

$$(\sin(\omega t), \quad \cos(\omega t)),$$

und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (1.2) lautet

$$u(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Mit der Methode „Variation der Konstanten“ herleiten wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $-\ddot{u}(t) = \omega^2 u(t) + r(t)$:

$$\psi(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-s)) r(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Also die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (1.1) lautet

$$u(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) + \psi(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \tag{1.3}$$

Hier sind $\omega > 0$, $\psi(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ schon bekannt.

Anfangswertaufgabe Wir können die Anfangswertaufgabe der DGL (1.1) betrachten. Unter der Annahme der Anfangsdaten

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \tag{1.4}$$

sollten die Parameter c_1, c_2 die folgende Gleichungen erfüllen (mit Einsetzung (1.4) in die Lösungsformel (1.3))

$$u_0 = c_2, \quad u_1 = \omega c_1.$$

Damit gibt es eine eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe der DGL (1.1)-(1.4)

$$u(t) = \frac{u_1}{\omega} \sin(\omega t) + u_0 \cos(\omega t) + \psi(t).$$

Randwertaufgabe mit Dirichlet-Randbedingung Wir können auch das Randwertaufgabe RWA der DGL (1.1) betrachten. Wir werden sehen, dass RWA eine/keine/unendlich viele Lösung für verschiedene angegebene „Daten“ (ω, $r(t)$) hat.
Falls wir die Dirichlet-Randbedingung

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{1.5}$$

annehmen, sollten c_1, c_2 erfüllen (mit Einsetzung (1.4) in die Lösungsformel (1.3))

$$0 = c_2, \quad 0 = c_1 \sin\omega + \psi(1), \qquad \text{mit } \psi(1) = -\frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin(\omega(1-s))r(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Dann kommt die Frage: „Kann $c_1 \sin\omega = -\psi(1)$ immer gelten?“ Es gibt verschiedene Fälle:

- Fall $\sin\omega \neq 0$, d.h. $\omega \neq n\pi$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

  Dann sollte $c_1 = -\frac{\psi(1)}{\sin\omega}$ und es gibt eine eindeutige Lösung der Randwertaufgabe (1.1)-(1.5)

$$u(t) = -\frac{\psi(1)}{\sin\omega}\sin(\omega t) + \psi(t). \tag{1.6}$$

- Fall $\sin\omega = 0$, d.h. $\omega = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

  Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\psi(1) &= -\frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin(\omega(1-s))r(s)\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{\omega}\int_0^1 \big(\sin\omega\cos(\omega s) - \cos\omega\sin(\omega s)\big)r(s)\,\mathrm{d}s \\
&= (-1)^n\frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin(\omega s)r(s)\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

  - Fall $\int_0^1 \sin(\omega s)r(s)\,\mathrm{d}s \neq 0$.
    Die Randwertaufgabe (1.1)-(1.5) hat keine Lösung.
  - Fall $\int_0^1 \sin(\omega s)r(s)\,\mathrm{d}s = 0$.
    Die Randwertaufgabe (1.1)-(1.5) hat unendlich viele Lösungen

$$u(t) = c_1\sin(\omega t) + \psi(t), \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \tag{1.7}$$

Eine mögliche Zusammenfassung der RWA Die folgende Alternative gilt:

- Entweder

  Die homogene RWA (1.2)-(1.5)
  $$-\ddot{u} = \omega^2 u, \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{1.8}$$
  hat nur die triviale Lösung $u = 0$ ((1.6) mit $\psi(t) = 0$), und die inhomogene RWA (1.1)-(1.5)
  $$-\ddot{u} = \omega^2 u + r, \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{1.9}$$
  hat eine eindeutige Lösung (1.6).

- Oder

  Die homogene RWA (1.2)-(1.5) hat nichttriviale Lösung ((1.7) mit $\psi(t) = 0$), und die inhomogene RWA (1.1)-(1.5) hat keine Lösung; falls doch, dann nicht eindeutig.

Es genügt, das homogene Randwertproblem (1.3) zu betrachten, um die beiden Alternativen zu unterscheiden. Das homogene RWP (1.3) hat

- Entweder

  triviale Lösung, falls $\omega \neq n\pi$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Oder

  nichttriviale Lösungen, falls $\omega = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Wir können das homogene RWP (1.3) als ein Eigenwertproblem
$$-\ddot{u} = \lambda u, \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{1.10}$$
formulieren und $\lambda = \omega^2 = (n\pi)^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist ein Eigenwert des Eigenwertproblems (1.10) mit zugehörige Eigenfunktionen
$$c_1 \sin(n\pi t), \quad c_1 \neq 0.$$
Wir können das Eigenwertproblem (1.10) noch abstrakter als
$$Au = \lambda u \tag{1.11}$$
formulieren. Hier ist der Operator A gegeben durch
$$A : D(A) \mapsto C([0,1]), \quad D(A) = \{u \in C^2([0,1]) \,|\, u(0) = u(1) = 0\},$$
$$A(u) = -\ddot{u} \quad \text{für } u \in D(A).$$

[13.04.2021]

[14.04.2021]

1.2 Kurze Erinnerung an die Existenztheorie der Anfangswertaufgabe

Wir betrachten die lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

$$L[u] = r \text{ mit } L[u] := \sum_{m=0}^{n} a_m u^{(m)} = (a_0\ a_1 \cdots a_n) \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Hier sind die Koeffizienten $a_0, \cdots, a_n \in C([a,b])$ mit $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ sowie der Quellterm $r \in C([a,b])$ gegeben.
Mit

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{r}{a_n} \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

lautet die DGL (1.12)

$$\vec{u}' = A\vec{u} + \vec{r} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Allgemeine lineare Differentialsysteme erster Ordnung Das Anfangsproblem der allgemeinen homogenen Differentialgleichungen (1.12):

$$\vec{u}' = A\vec{u} \tag{1.15}$$

mit Anfangsbedingung $\vec{u}(x_0) = \vec{u_0}$ für $x_0 \in [a,b]$ hat eine eindeutige Lösung (da die Elemente von A alle beschränkt sind)

$$\vec{u} = \vec{\phi}(x, x_0, \vec{u_0}) \in C^1([a,b]).$$

Insbesondere hat (1.15) n linear unabhängige Lösungen

$$\vec{\phi}(x, x_0, \vec{\delta_1}), \cdots, \vec{\phi}(x, x_0, \vec{\delta_n})$$

mit $\vec{\delta_{j,k}} = 1$ für $j = k$ und $= 0$ für $j \neq k$. Wir setzen diese n Lösungen zusammen:

$$\Pi(x, x_0) := (\vec{\phi}(x, x_0, \vec{\delta_1}), \cdots, \vec{\phi}(x, x_0, \vec{\delta_n})),$$

und $\Pi(x, x_0)$ heißt die Hauptmatrixlösung von der homogenen Differentialgleichungen (1.15):

$$\Pi(x, x_0)' = A(x)\Pi(x, x_0), \quad \Pi(x_0, x_0) = \mathrm{Id}\,.$$

Da $\vec{u_0} = u_{0,1}\vec{\delta_1} + \cdots + u_{0,n}\vec{\delta_n}$ mit $u_{0,j} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, ist die lineare Abbildung

$$\vec{u_0} \mapsto \vec{\phi}(x, x_0, \vec{u_0})$$

mit Superpositionsprinzip durch

$$\vec{\phi}(x, x_0, \vec{u_0}) = \Pi(x, x_0)\vec{u_0}$$

gegeben. Deshalb bilden die Lösungen der homogenen Differentialgleichung (1.15) einen n-dimensionalen Vektorraum.
Allgemeiner erhalten wir mit n Lösungen $\vec{\varphi_1}, \cdots, \vec{\varphi_n}$ eine Matrixlösung $\Phi(x) = (\vec{\varphi_1}(x), \cdots, \vec{\varphi_n}(x))$ des linearen Differentialsystems erster Ordnung (1.15): $\Phi' = A\Phi$. Die Determinante von $\Phi(x)$ heißt Wronski-Determinante

$$W(x) := \det \Phi(x).$$

Falls $W(x) \neq 0 (x \in [a, b])$, wird die Matrixlösung $\Phi(x)$ als Fundamentalmatrixlösung bezeichnet. In diesem Fall sind diese n Lösungen $\vec{\varphi_1}, \cdots, \vec{\varphi_n}$ linear unabhängig, und die Differentialgleichung wird aufgrund der Gleichheit:

$$A = \Phi'\Phi^{-1}$$

eindeutig durch Φ bestimmt. Falls es zwei Fundamentalmatrixlösungen $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ gibt, gilt dann

$$\Psi(x) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}\Psi(x_0) \tag{1.16}$$

für alle $x, x_0 \in [a, b]$ (da beides das Anfangsproblem der homogenen Differentialgleichung $\Psi' = A\Psi$ mit Anfangsdaten $\Psi(x_0)$ lösen). Insbesondere gilt

$$\Pi(x, x_0) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1} = \Psi(x)\Psi(x_0)^{-1}. \tag{1.17}$$

Aufgrund der Abel's Identität (auch von Liouville's Formular gennant)

$$W(x) = W(x_0)\exp\Big(\int_{x_0}^{x} \mathrm{Spur}(A(y))\,\mathrm{d}y\Big) \tag{1.18}$$

genügt es, $W(x_0) \neq 0$ um einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ zu kontrollieren, sodass Φ eine Fundamentalmatrixlösung ist.

Falls $(\vec{\varphi}_1, \cdots, \vec{\varphi}_n)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung (1.15) ist, lautet der n-dimensionalen Vektorraum der Lösungen von (1.15)

$$\{c_1\vec{\varphi}_1 + \cdots + c_n\vec{\varphi}_n \,|\, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}.$$

Falls $\vec{\psi}$ eine spezielle Lösung der allgemeinen inhomogenen Differentialgleichung (1.3)

$$\vec{u}' = A\vec{u} + \vec{r} \tag{1.19}$$

ist, lautet die allgemeine Lösung $\vec{u}$ von (1.19)

$$\vec{u} = c_1\vec{\varphi}_1 + \cdots + c_n\vec{\varphi}_n + \vec{\psi} \text{ mit } c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ beliebig.} \tag{1.20}$$

Insbesondere kann die Lösung des Anfangsproblem von (1.19) mit Anfangsbedingung $\vec{u}(x_0) = \vec{u_0}$ eindeutig durch die Hauptmatrixlösung $\Pi(x, x_0)$ wie

$$\vec{u}(x) = \Pi(x, x_0)\vec{u_0} + \int_{x_0}^{x} \Pi(x, y)\vec{r}(y)\,\mathrm{d}y \tag{1.21}$$

ausgedruckt werden.

Allgemeine lineare Differentialgleichung der $n$ten Ordnung Mit (1.13) schreiben wir den obigen Text neu. Das Anfangsproblem der homogenen Differentialgleichung (1.12)

$$L[u] = \sum_{m=0}^{n} a_m u^{(m)} = 0 \tag{1.22}$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x_0) = v_1, \quad u'(x_0) = v_2, \cdots, u^{(n-1)}(x_0) = v_n \tag{1.23}$$

hat eine eindeutige Lösung

$$u(x) = \phi(x, x_0, \vec{v}).$$

Insbesondere hat (1.22) n lineare unabhängige Lösungen

$$\phi_1(x, x_0) := \phi(x, x_0, \vec{\delta_1}), \cdots, \phi_n(x, x_0) := \phi(x, x_0, \vec{\delta_n}),$$

und die entsprechende Hauptmatrixlösung

$$\Pi(x, x_0) = \begin{pmatrix} \phi_1(x, x_0) & \cdots & \phi_n(x, x_0) \\ \phi_1'(x, x_0) & \cdots & \phi_n'(x, x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x, x_0) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x, x_0) \end{pmatrix} \text{ mit } \Pi(x_0, x_0) = \mathrm{Id}\,.$$

Die lineare Abbildung

$$\vec{v} \mapsto \phi(x, x_0, \vec{v})$$

kann durch

$$\phi(x, x_0, \vec{v}) = \Pi^1(x, x_0) \cdot \vec{v} \text{ mit } \Pi^1(x, x_0) = \big(\phi_1(x, x_0), \quad \cdots, \quad \phi_n(x, x_0)\big)$$

gegeben sein.
Sei $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem von der homogenen Differentialgleichung (1.22) mit Wronski-Determinante

$$W(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)(x) = \det \Phi(x) \neq 0 \text{ mit } \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Sei ψ eine spezielle Lösung von der inhomogenen Differentialgleichung (1.12). Dann lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1.12)

$$u = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n + \psi \text{ mit } c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ beliebig.} \tag{1.25}$$

Mit der Abel's Identität

$$W(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)(x) = W(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)(x_0) \exp\Big(\int_{x_0}^{x} -\frac{a_{n-1}}{a_n}\,\mathrm{d}y\Big)$$

ist $\Pi^1(x, x_0) = \big(\phi_1(x, x_0), \quad \cdots, \quad \phi_n(x, x_0)\big)$ ein Fundamentalsystem von der homogenen Differentialgleichung (1.22). Das Anfangsproblem der inhomogenen Differentialgleichung (1.12) mit Anfangsdatum (1.23) hat eine eindeutige Lösung

$$u(x) = v_1\phi_1(x, x_0) + \cdots + v_n\phi_n(x, x_0) + \int_{x_0}^{x} \phi_n(y, x_0)\frac{r}{a_n}(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

[14.04.2021]

[20.04.2021]

1.3 Alternativensatz der Randwertaufgabe

Wir betrachten jetzt die Randwertaufgabe der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung (1.12)

$$L[u] = r \text{ mit } L[u] := \sum_{m=0}^{n} a_m u^{(m)} = (a_0\ a_1 \cdots a_n) \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

mit den linearen Randbedingungen

$$U_j[u] = \gamma_j \ (j = 1, \cdots, n) \text{ mit } U_j[u] := \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\alpha_{jk} u^{(k)}(a) + \beta_{jk} u^{(k)}(b) \Big). \quad (1.27)$$

Hier sind die Koeffizienten $a_m \in C([a, b]; \mathbb{R}(\mathbb{C}))$ (mit $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$) sowie α_{jk}, $\beta_{jk} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ gegeben. Hier sind der Quellterm $r \in C([a, b]; \mathbb{R}(\mathbb{C}))$ sowie $\gamma_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ auch gegeben, und falls $r = 0$ und $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$, heißt die Randwertaufgabe (1.26)-(1.27) die homogene Randwertaufgabe.
Sei $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem von der homogenen Differentialgleichung: $L[u] = \sum_{m=0}^{n} a_m u^{(m)} = 0$. Sei ψ eine spezielle Lösung von der inhomogenen Differentialgleichung (1.26). Dann lautet die allgemeine Lösung von (1.26) wie in (1.25)

$$u = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n + \psi \text{ mit } c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ beliebig.} \quad (1.28)$$

Wir möchten den Vektor der Parameter $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ finden, sodass die obige Lösung (1.28) die Randbedingung (1.27) erfüllt. Falls es eine eindeutige $\vec{c}$ existiert, hat die Randwertaufgabe (1.26)-(1.27) eine eindeutige Lösung.

Alternativensatz Wir setzen das Formular (1.28) in die Randbedingung (1.27) ein:

$$U_j[u] = \sum_{l=1}^{n} c_l U_j[\varphi_l] + U_j[\psi] = \gamma_j \quad (j = 1, \cdots, n).$$

Wir setzen die Matrix

$$M = (U_j[\varphi_l])_{j,l=1,\cdots,n} = (U_j[\varphi_1], \cdots, U_j[\varphi_n])_{j=1,\cdots,n} \quad (1.29)$$

und den Vektor

$$\vec{b} = (\gamma_j - U_j[\psi])_{j=1,\cdots,n} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - U_1[\psi] \\ \vdots \\ \gamma_n - U_n[\psi] \end{pmatrix}.$$

Wir suchen dann den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, der die Randbedingung erfüllt:

$$M\vec{c} = \vec{b}.$$

Es gibt mehr Möglichkeiten:

- Falls $\det M \neq 0$, existiert es dann eine eindeutige Lösung $\vec{c} = M^{-1}\vec{b}$.
- Falls $\det M = 0$,
  - und falls $\vec{b} = 0$, existiert es $\vec{c} \neq 0$ mit $M\vec{c} = \vec{b}$.
  - gibt es $\vec{b} \neq 0$ sodass es kein $\vec{c}$ mit $M\vec{c} = \vec{b}$ existiert.
  - gibt es $\vec{b} \neq 0$ sodass es mehr als ein $\vec{c} \neq 0$ mit $M\vec{c} = \vec{b}$ existiert.

Damit haben wir schon bewiesen

Satz 1.1 (Alternativensatz)**.** *Es liegt genau einer der beiden Fälle vor:*

1. *Die homogene Randwertaufgabe*

$$L[u] = 0, \quad U_j[u] = 0\,(j = 1, \cdots, n), \quad x \in [a, b] \tag{1.30}$$

hat nur die triviale Lösung, und die inhomogene Randwertaufgabe

$$L[u] = r, \quad U_j[u] = \gamma_j\,(j = 1, \cdots, n), \quad x \in [a, b] \tag{1.31}$$

ist für alle $r \in C([a, b])$ und alle $\gamma_1, \cdots \gamma_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ eindeutig lösbar.

2. *Die homogene Randwertaufgabe* (1.30) *hat nichttriviale Lösung, und die inhomogene Randwertaufgabe* (1.31) *ist nicht für alle $r \in C([a, b])$ und alle $\gamma_1, \cdots \gamma_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ lösbar; wenn sie lösbar ist, dann nicht eindeutig.*

Bemerkung 1.1. *Das Fakt, ob* $\det M = 0$ *oder nicht, hängt nicht von der Wahl des Fundamentalsystems ab. Falls $(\widetilde{\varphi}_1, \cdots, \widetilde{\varphi}_n)$ ein weiteres Fundamentalsystem ist, existiert eine konstante invertierbare Matrix C (mit Hilfe von* (1.16)*) mit*

$$\widetilde{\Phi}(x) = \Phi(x)\, C \text{ für alle } x \in [a, b].$$

wobei Φ eine Matrix definiert in (1.24) *ist. Da*

$$M = A_\alpha \Phi(a) + A_\beta \Phi(b) \text{ mit } A_\theta = (\theta_{jk})_{j=1,\cdots,n,k=0,\cdots,n-1}(\theta = \alpha, \beta), \tag{1.32}$$

gilt dann

$$\widetilde{M} = A_\alpha \widetilde{\Phi}(a) + A_\beta \widetilde{\Phi}(b) = MC.$$

Deshalb gilt $\det \widetilde{M} = \det M \det C$ *mit* $\det C \neq 0$.

Zurück zum Federmodel Erinnern an das Federmodel (1.1)

$$-\omega^2 u(x) - u''(x) = r(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.33}$$

wobei die Koeffizienten $a_0 = -\omega^2 < 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1 \neq 0$ und der Quellterm $r \in C([0,1])$ gegeben sind.
Das ist eine Differentialgleichung 2ter Ordnung, und mit

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r} := \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

lautet die DGL (1.33)

$$\vec{u}' = A\vec{u} + \vec{r} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Anfangsbedingung $\vec{u}(0) = \vec{\delta_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\vec{u}(0) = \vec{\delta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir für die homogene DGL $\vec{u}' = A\vec{u}$ die Hauptmatrixlösung

$$\Pi(x,0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega x) \\ -\omega\sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen das Fundamentalsystem der homogenen DGL von (1.33): $-\omega^2 u(x) - u''(x) = 0$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\sin(\omega x), \cos(\omega x)),$$

und die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL (1.33) lautet

$$u = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x) + \psi(x) \text{ mit } \psi(x) = -\frac{1}{\omega}\int_0^x \sin(\omega(x-y))r(y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{1.34}$$

wobei die spezielle Lösung ψ die erste Komponente von der Lösung $\int_0^x \Pi(x,y)\vec{r}(y)\,\mathrm{d}y$ ist.
Betrachten wir jetzt die Dirichlet-Bedingung (mit $\alpha_{jk} = \beta_{jk} = 1$ für $(j,k) = (1,0)$ und $= 0$ sonst in (1.27))

$$U_1[u] = u(0) = \gamma_1, \quad U_2[u] = u(1) = \gamma_2.$$

Wir suchen dann $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, sodass

$$M\vec{c} = \vec{b}$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} U_1[\varphi_1] & U_1[\varphi_2] \\ U_2[\varphi_1] & U_2[\varphi_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - U_1[\psi] \\ \gamma_2 - U_2[\psi] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 - \psi(1) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt die folgende Alternative

- Entweder $\det M = -\sin(\omega) \neq 0$

  Die homogene Randwertaufgabe

  $$-\omega^2 u - u'' = 0, \quad u(0) = u(1) = 0$$

  hat nur die triviale Lösung $u = 0$ (mit $\vec{c} = \vec{b} = 0$), und die inhomogene Randwertaufgabe

  $$-\omega^2 u - u'' = r, \quad u(0) = \gamma_1, \quad u(1) = \gamma_2$$

  hat eine eindeutige Lösung (1.34) mit $\vec{c} = M^{-1}\vec{b}$.

- Oder $\det M = -\sin\omega = 0$, d.h. $\omega = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

  Die homogene RWA hat nichttriviale Lösung $u = c_1 \sin(\omega x)$, $c_1 \in \mathbb{R}$ (mit $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$) und die inhomogene RWA

  - hat keine Lösung (im Fall $(-1)^n\gamma_1 \neq \gamma_2 - \psi(1)$);
  - hat keine eindeutige Lösung $u = c_1 \sin(\omega x) + \gamma_1 \cos(\omega x) + \psi(x)$, $c_1 \in \mathbb{R}$ (mit $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ im Fall $(-1)^n\gamma_1 = \gamma_2 - \psi(1)$).

[20.04.2021]

[21.04.2021]

Ein allgemeineres Beispiel Betrachten wir jetzt die folgende Randwertaufgabe mit Dirichlet-Randbedingung

$$c(x)u(x) - u''(x) = r(x)\,(x \in [0,1]) \text{ mit } u(0) = \gamma_1 \text{ und } u(1) = \gamma_2, \quad (1.35)$$

wobei die Koeffizienten $a_0 = c(x) \in C([0,1])$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1 \neq 0$ und der Quellterm $r \in C([0,1])$ gegeben sind.

Dann kommt die Frage: „Ist diese RWA eindeutig lösbar?“
Wir betrachten jetzt nur den Fall $c(x) \geqslant 0$. In diesem Fall hat die homogene RWA

$$c(x)u(x) - u''(x) = 0\,(x \in [0,1]) \text{ mit } u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 0 \tag{1.36}$$

nur die triviale Lösung, da falls $u \in C([0,1])$ eine Lösung ist, gilt

$$0 \overset{\text{DGL}}{=} \int_0^1 (cu - u'') \cdot u \,\mathrm{d}x = \int_0^1 cu^2 \,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 u'' u \,\mathrm{d}x}_{(u'u)|_0^1 - \int_0^1 (u')^2 \,\mathrm{d}x}$$

$$\overset{\text{RW}}{=} \int_0^1 (cu^2 + (u')^2) \,\mathrm{d}x \overset{c \geqslant 0}{\Rightarrow} u' \equiv 0 \overset{\text{RW}}{\Rightarrow} u \equiv 0.$$

Mit Satz 1.1 ist die RWA (1.35) eindeutig lösbar. Die Voraussetzung $c(x) \geqslant 0$ $(x \in [0,1])$ kann abgeschwächt werden zu $c(x) > -\pi^2$ $(x \in [0,1])$. Der Beweis findet sich später.

Wir betrachten jetzt den einfachen Fall $c = 0$:

$$-u''(x) = r(x)\,(x \in [0,1]) \text{ mit } u(0) = \gamma_1 \text{ und } u(1) = \gamma_2, \tag{1.37}$$

Bemerken dass dieser Fall kein obiges Federmodel mit $\omega \neq 0$ ist:
Die Hauptmatrixlösung ist $\Pi(x,0) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (für das Fundamentalsystem $(1,x)$) mit $\det M \neq 0$.
Die allgemeine Lösung lautet

$$u(x) = c_1 + c_2 x + \int_0^x \big(\Pi(x,y)\vec{r}(y)\big)^1 \,\mathrm{d}y = c_1 + c_2 x - \int_0^x (x-y) r(y) \,\mathrm{d}y\,.$$

Mit

$$c_1 = \gamma_1, \quad c_2 = \gamma_2 + \int_0^1 (1-y) r(y) \,\mathrm{d}y - \gamma_1$$

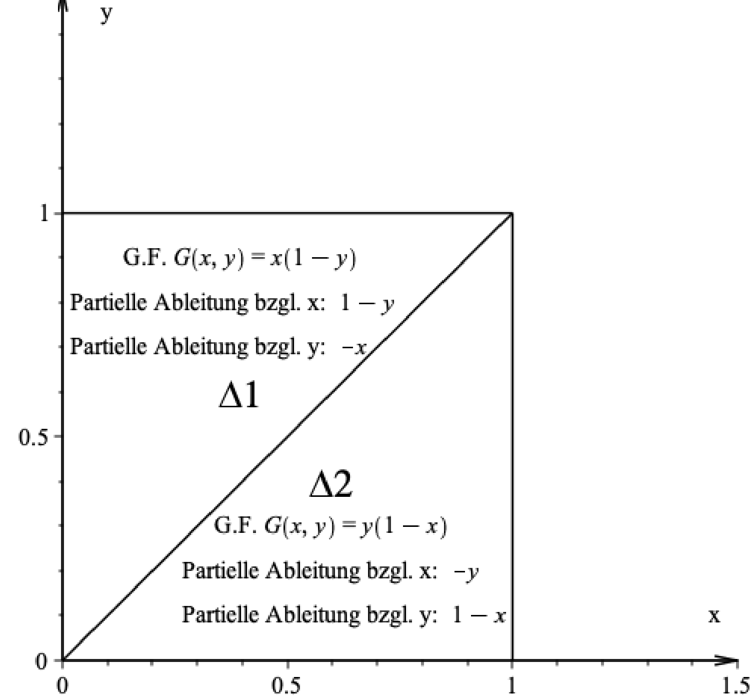
ist die obige Lösung tatsächlich die Lösung der Randwertaufgabe (1.37), d.h. die eindeutige Lösung der RWA lautet

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y + \gamma_1 (1-x) + \gamma_2 x \tag{1.38}$$

wobei

$$\begin{aligned} G(x,y) &= x(1-y) + \big(-(x-y)\big)|_{y \in [0,x]} \\ &= \begin{cases} x(1-y) & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ (1-x)y & \text{für } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.39}$$

die Greensche Funktion zu $(-u'', u(0), u(1))$ bezeichnet.



1.4 Greensche Funktion und das Randwertproblem

Wir interessieren uns in diesem Sektion für die „explizite“ eindeutige Lösung der Randwertaufgabe

$$L[u] = r \ (x \in [a, b]), \quad U_j[u] = \gamma_j \ (j = 1, \cdots, n), \tag{1.40}$$

falls der 1. Fall im Satz 1.1 stattfindet, d.h. $\det M \neq 0$. Hier sind

$$L[u] := \sum_{m=0}^{n} a_m u^{(m)}, \quad U_j[u] := \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\alpha_{jk} u^{(k)}(a) + \beta_{jk} u^{(k)}(b)\Big) \ (j = 1, \cdots, n),$$

wobei die Koeffizienten $a_m \in C([a, b])$ (mit $a_n(x) \neq 0$ $(x \in [a, b])$), α_{jk}, $\beta_{jk} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ sowie die Quellterme $r \in C([a, b])$, $\gamma_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ gegeben sind. Die Matrix M ist durch (1.29) (order (1.32)) gegeben

$$M = (U_j[\varphi_l])_{j,l=1,\cdots,n} = (U_j[\varphi_1], \cdots, U_j[\varphi_n])_{j=1,\cdots,n},$$

wobei $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem zu $L[u] = 0$.
Wir erinnern uns an die eindeutige Lösung (1.38) von der RWA (1.37), wobei

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ (1-x)y & \text{für } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

die Greensche Funktion zu $(-u'', u(0), u(1))$ bezeichnet. Wir suchen die Greensche Funktion

$$G(x, y) : [a, b]^2 \mapsto \mathbb{R}$$

zu der allgemeineren RWA (1.40): $(L, U_1, \cdots, U_n)$, die die folgende Eigenschaften haben:

(1) $G|_{\Delta_\pm} \in C^n_x(\Delta_\pm)$ erfüllen die homogene DGL bzgl. x:

$$L[G|_{\Delta_\pm}(\cdot, y)] = 0 \text{ mit } \Delta_\pm = \{(x,y) \in [a,b]^2 \mid \pm(x-y) \leqslant 0\}, \tag{1.41}$$

sowie die Randbedingungen bzgl. x:

$$U_j[G(\cdot, y)] = 0 \ (j = 1, \cdots, n). \tag{1.42}$$

(2) $G \in C^{n-2}_x([a,b]^2)$ erfüllt die folgende Sprungbedingung

$$(\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}})(x, x-0) - (\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}})(x, x+0) = \frac{1}{a_n(x)} \quad (x \in [a,b]). \tag{1.43}$$

Sei $n = 1$. Die RWA (1.40) lautet

$$L[u] := a_0 u + a_1 u' = r, \quad U[u] := \alpha u(a) + \beta u(b) = \gamma \ (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

Wir können die homogene DGL:

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} G(x,y)$$

mit der Randbedingung

$$\alpha G(a,y) + \beta G(b,y) = 0$$

und der Sprungbedingung

$$G(x, x-0) - G(x, x+0) = \frac{1}{a_1(x)}$$

direkt lösen (mit der Fundamentallösung $\varphi(x) = \exp(-\int_a^x \frac{a_0}{a_1}\,\mathrm{d}z\,)$):

$$G(x,y) = \begin{cases} c^+(y)\varphi(x) & \text{auf } \Delta_+, \\ c^-(y)\varphi(x) & \text{auf } \Delta_-, \end{cases} \tag{1.44}$$

mit

$$\alpha c^+(y) + \beta c^-(y)\varphi(b) = 0,$$
$$\big(c^-(x) - c^+(x)\big)\varphi(x) = \frac{1}{a_1(x)},$$

d.h. falls $\det M = M = U[\varphi] = \alpha + \beta \exp(-\int_a^b \frac{a_0}{a_1}\,\mathrm{d}z\,) \neq 0$, gilt es

$$\begin{aligned} \text{Fall } \alpha \neq 0 : c^+(y) &= -\frac{\beta}{\alpha} \exp(-\int_a^b \frac{a_0}{a_1}\,\mathrm{d}z\,) c^-(y) \Big(= (1 - \frac{M}{\alpha}) c^-(y) \Big), \\ c^-(y) &= \frac{1}{a_1(y)} \exp(\int_a^y \frac{a_0}{a_1}\,\mathrm{d}z\,) \frac{\alpha}{M}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

oder

$$\begin{aligned} \text{Fall } \beta \neq 0 : c^-(y) &= -\frac{\alpha}{\beta} \exp(\int_a^b \frac{a_0}{a_1}\,\mathrm{d}z\,) c^+(y) \Big(= (1 - \frac{M \exp(\int_a^b \frac{a_0}{a_1}\,\mathrm{d}z\,)}{\beta}) c^+(y) \Big), \\ c^+(y) &= -\frac{1}{a_1(y)} \exp(-\int_y^b \frac{a_0}{a_1}\,\mathrm{d}z\,) \frac{\beta}{M}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

[21.04.2021]

[27.04.2021]

Sei $n \geqslant 2$. Sei $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem zu $L[u] = 0$. Wegen (1.41) und $G \in C([a,b]^2)$ sollt die Greensche Funktion die folgende Form haben

$$G(x,y) = \sum_{l=1}^n c_l^\pm(y) \varphi_l(x) \text{ auf } \Delta_\pm,$$

mit $c_l^\pm \in C([a,b])$ oder äquivalent

$$G(x,y) = \begin{cases} \sum_{l=1}^n (c_l(y) + d_l(y)) \varphi_l(x) & \text{auf } \Delta_+, \\ \sum_{l=1}^n (c_l(y) - d_l(y)) \varphi_l(x) & \text{auf } \Delta_-, \end{cases} \tag{1.47}$$

mit $c_l = \frac{1}{2}(c_l^+ + c_l^-), d_l = \frac{1}{2}(c_l^+ - c_l^-) \in C([a,b])$. Jetzt rechnen wir die Randwerten

$$\begin{aligned} U_j[G(\cdot,y)] &= \sum_{l=1}^n (c_l(y) + d_l(y)) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{jk} \varphi_l^{(k)}(a) + \sum_{l=1}^n (c_l(y) - d_l(y)) \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} \varphi_l^{(k)}(b) \\ &= \sum_{l=1}^n c_l(y) U_j[\varphi_l] + \sum_{l=1}^n d_l(y) \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\alpha_{jk} \varphi_l^{(k)}(a) - \beta_{jk} \varphi_l^{(k)}(b) \Big) \\ &= (M\vec{c})_j(y) + \vec{h}_j(y), \end{aligned}$$

wobei $M = (U_j[\varphi_l])_{j,l=1,\cdots,n}$, $\vec{c}(y) = \begin{pmatrix} c_1(y) \\ \vdots \\ c_n(y) \end{pmatrix}$ und

$$\vec{h}(y) = N\vec{d}(y),\ N = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha_{jk}\varphi_l^{(k)}(a) - \beta_{jk}\varphi_l^{(k)}(b)\right)\right)_{j,l=1,\cdots,n},\ \vec{d}(y) = \begin{pmatrix} d_1(y) \\ \vdots \\ d_n(y) \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\text{RW in (1.42)} \ \Leftrightarrow 0 = M\vec{c} + \vec{h} \overset{\det M \neq 0}{\Leftrightarrow} \vec{c}(y) = -M^{-1}N\vec{d}(y).$$

Wir betrachten jetzt die Sprungbedingung (1.43). Da

$$\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,y) = \begin{cases} \sum_{l=1}^n (c_l(y) + d_l(y))\varphi_l^{(k)}(x) & \text{auf } \Delta_+, \\ \sum_{l=1}^n (c_l(y) - d_l(y))\varphi_l^{(k)}(x) & \text{auf } \Delta_-, \end{cases} \qquad k = 0, \cdots, n,$$

gilt dann

$$G \in C_x^{n-2}([a,b]^2) \Leftrightarrow \sum_{l=1}^n d_l(x)\varphi_l^{(k)}(x) = 0 \quad (k = 0, \cdots, n-2),$$
$$(1.43) \Leftrightarrow -2\sum_{l=1}^n d_l(x)\varphi_l^{(n-1)}(x) = \frac{1}{a_n(x)} \quad (x \in [a,b]),$$

d.h.

$$\text{Eigenschaft (2)} \Leftrightarrow \Phi\vec{d} = \vec{g} \text{ mit } \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2a_n} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \vec{d} = \Phi^{-1}\vec{g}.$$

Deshalb haben wir die eindeutige Greensche Funktion (1.47), die die Eigenschaften (1) und (2) haben, wobei

$$\vec{d} = \Phi^{-1}\vec{g}, \quad \vec{c} = -M^{-1}N\vec{d}. \tag{1.48}$$

Wir haben dann die folgende Darstellungsformel für die Lösung der RWA (1.40).

Satz 1.2 (Lösung der RWA durch die Greensche Funktion)**.** *Falls die homogene Randwertaufgabe von* (1.40) *nur triviale Lösung besitzt (d.h. es liegt 1.*

Fall des Alternativensatz 1.1 vor), ist die eindeutige Lösung der inhomogenen Randwertaufgabe (1.40) *gegeben durch*

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)r(y)\,\mathrm{d}y + \sum_{l=1}^{n} \gamma_l \varphi_l(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{1.49}$$

wobei $G = G(x,y)$ *die obige Greensche Funktion (*(1.44)-(1.45)-(1.46) *für* $n = 1$ *und* (1.47)-(1.48) *für* $n \geqslant 2$*) ist und* $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ *die Fundamentalmatrixlösung zu* $L[u] = 0$ *mit* $U_j[\varphi_l] = \delta_{jl}$.

Beweis. **1. Schritt: Überprüfung von** $L[u] = r$
Wir zeigen zunächst $L[u] = r$, wobei $u(x)$ durch (1.49) definiert ist. Es genügt, dass es

$$L[\phi](x) = r(x) \text{ mit } \phi(x) = \int_a^b G(x,y)r(y)\,\mathrm{d}y \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

gilt.
Wir rechnen die Ableitung erster Ordung von $\phi(x) = \int_a^x G(x,y)r(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^b G(x,y)r(y)\,\mathrm{d}y$:

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= G(x,x-0)r(x) - G(x,x+0)r(x) \\ &\quad + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}G(x,y)r(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^b \frac{\partial}{\partial x}G(x,y)r(y)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Falls $n = 1$, haben wir mit (1.43)

$$\phi'(x) = \frac{r(x)}{a_1(x)} + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}G(x,y)r(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^b \frac{\partial}{\partial x}G(x,y)r(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}L[\phi] &= r(x) + \int_a^x \underbrace{\Big(a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}G(x,y) + a_0(x)G(x,y)\Big)}_{L[G|_{\Delta_-}(\cdot,y)]} r(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_x^b \underbrace{\Big(a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}G(x,y) + a_0(x)G(x,y)\Big)}_{L[G|_{\Delta_+}(\cdot,y)]} r(y)\,\mathrm{d}y \\ &\overset{(1.41)}{=} r(x).\end{aligned}$$

Für $n \geqslant 2$ haben wir mit $G \in C_x^{n-2}$

$$\phi'(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y \; + \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y \,.$$

Mit Induktion gelten

$$\begin{aligned}
\phi^{(k)}(x) &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} G(x, x-0) r(x) - \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} G(x, x+0) r(x) \\
&\quad + \int_a^x \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y \; + \int_x^b \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y \\
&\underset{n \geqslant 2}{\overset{G \in C_x^{n-2}}{=}} \int_a^x \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y \; + \int_x^b \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y \qquad (1 \leqslant k \leqslant n-1),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\phi^{(n)}(x) &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x, x-0) r(x) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x, x+0) r(x) \\
&\quad + \int_a^x \frac{\partial^k}{\partial x^n} G(x,y) r(y) dy + \int_x^b \frac{\partial^k}{\partial x^n} G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y \\
&\overset{(1.43)}{=} \frac{1}{a_n(x)} r(x) + \int_a^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y \; + \int_x^b \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x,y) r(y) \,\mathrm{d}y \,.
\end{aligned}$$

Zusammensetzten haben wir

$$\begin{aligned}
L[\phi] = \sum_{m=0}^n a_m(x) \phi^{(m)}(x) = r(x) &+ \int_a^x \Big(\sum_{m=0}^n a_m(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} G(x,y) \Big) r(y) \,\mathrm{d}y \\
&+ \int_x^b \Big(\sum_{m=0}^n a_m(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} G(x,y) \Big) r(y) \,\mathrm{d}y \\
&\overset{(1.41)}{=} r(x).
\end{aligned}$$

2. Schritt: Überprüfung von $U_j[u] = \gamma_j$
Wir rechnen zunächst

$$\begin{aligned}
U_j[\phi] &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\alpha_{jk} \phi^{(k)}(a) + \beta_{jk} \phi^{(k)}(b) \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\alpha_{jk} \int_a^b \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(a,y) r(y) \,\mathrm{d}y \; + \beta_{jk} \int_a^b \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(b,y) r(y) \,\mathrm{d}y \Big) \\
&= \int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\alpha_{jk} \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(a,y) + \beta_{jk} \int_a^b \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(b,y) \Big) r(y) \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= \int_a^b U_j[G(\cdot, y)]r(y)\,\mathrm{d}y \overset{(1.42)}{=} 0.$$

Deshalb folgt

$$U_j[u] = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l U_j[\varphi_l] = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l \delta_{jl} = \gamma_j.$$

□

Bemerkung 1.2. *Die eindeutige Lösung der RWA: $L[u] = r$, $U_j[u] = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ ist gegeben durch*

$$u(x) = \int_a^b G(x, y)r(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{1.50}$$

Die Darstellungsformel (1.49) *legt G eindeutig für $n \geqslant 2$ fest: Falls es eine weitere Funktion $\tilde{G} \in C([a, b]^2)$ mit $u(x) = \int_a^b \tilde{G}(x, y)r(y)\,\mathrm{d}y$ für alle $r \in C([a, b])$ existiert, gilt dann $G = \tilde{G}$. (Kurz Beweis: Falls nicht, existieren zwei Umgebungen U_x, U_y von einem Punkt $(x_0, y_0) \in [a, b]^2$ s.d. $(G - \tilde{G})|_{U_x \times U_y} > 0$ (oder < 0) und damit $\int_a^b (G - \tilde{G})(x, y)r(y)\,\mathrm{d}y > 0$ $(x \in U_x)$ (order < 0) für eine stetige Funktion r mit $r = 0$ auf $[a, b] \backslash U_y$ und $r > 0$ auf U_y. ↯)*
Im Fall $n = 1$ gilt die Eindeutigkeit nur bis auf Freiheiten auf der Diagonalen.

[27.04.2021]

[28.04.2021]

1.5 Sturm-Liouville-Problem

Wir betrachten die folgende homogene gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L_{SL}[u] := -(p(x)u'(x))' + (q(x) - zw(x))u(x) = 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{1.51}$$

Hier sind $p \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$, $q, w \in C([a, b]; \mathbb{R})$ mit $p(x), w(x) > 0$ $(x \in [a, b])$ gegeben. Hier ist $z \in \mathbb{C}$ ein Parameter.

Lösung des Anfangswertproblems Mit (im Vergleich mit (1.13))

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u(x) \\ p(x)u'(x) \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

lautet die DGL (1.51)

$$\vec{u}' = A\vec{u} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p(x)} \\ q(x) - zw(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.53}$$

Sei $\vec{c}(x) = \begin{pmatrix} c(x) \\ p(x)c'(x) \end{pmatrix}$ die Lösung des Anfangswertproblems von (1.53) mit Anfangsdaten $\vec{c}(x_0) = \vec{\delta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $\vec{s}(x) = \begin{pmatrix} s(x) \\ p(x)s'(x) \end{pmatrix}$ die Lösung des Anfangswertproblems von (1.53) mit Anfangsdaten $\vec{s}(x_0) = \vec{\delta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann folgt die Hauptmatrixlösung der homogenen Differentialgleichungen (1.53) (mit stetiger Abhängigkeit von z, x, x_0)

$$\Pi(z, x, x_0) = (\vec{c}(z, x, x_0), \vec{s}(z, x, x_0)) = \begin{pmatrix} c(z, x, x_0) & s(z, x, x_0) \\ p(x)c'(z, x, x_0) & p(x)s'(z, x, x_0) \end{pmatrix},$$
$$\text{mit } \Pi(z, x_0, x_0) = \mathrm{Id}\,.$$

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{u}' = A\vec{u}, \quad \vec{u}(x_0) = \vec{u}_0 := \begin{pmatrix} u(x_0) \\ p(x_0)u'(x_0) \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

kann durch die Hauptmatrixlösung ausgedruckt werden:

$$\vec{u}(z, x, x_0) = \Pi(z, x, x_0)\vec{u}_0(x),$$
$$\text{d.h. } u(z, x, x_0) = (\Pi(z, x, x_0)\vec{u}_0(x))^1 = c(z, x, x_0)u(x_0) + s(z, x, x_0)p(x_0)u'(x_0).$$

Die Hauptmatrixlösung ist eigentlich ganze Funktion bzgl. $z \in \mathbb{C}$ für jeden Punkt $(x, x_0) \in [a, b]^2$, d.h. $\Pi(\cdot, x, x_0)$ ist analytisch in der gesamten komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$: Das Anfangswertproblem (1.54) ist äquivalent zu der Integralgleichung: $\vec{u}(x) = \vec{u}_0 + \int_{x_0}^{x} A(y)\vec{u}(y)\,\mathrm{d}y$, d.h.

$$\vec{u} = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{u}_m, \quad \vec{u}_{m+1}(x) = \int_{x_0}^{x} A(y)\vec{u}_m(y)\,\mathrm{d}y \text{ für } m \geqslant 0,$$

und diese Induktion $\vec{u}_m \mapsto \vec{u}_{m+1}$ ist ganze Funktion (tatsächlich linear) bzgl. $z \in \mathbb{C}$.
Die (geänderte) Wronskian von der zwei Lösungen u, v der DGL (1.51) lautet

$$W_x(u, v) := \det(\vec{u}, \vec{v}) = p(x)u(x)v'(x) - p(x)u'(x)v(x).$$

Aufgrund der Liouville-Formel (1.18) gilt

$$\det \Pi(z,x,x_0) = W_x(c(z,\cdot,x_0), s(z,\cdot,x_0)) = 1 \text{ ist unabhängig von } x.$$

Falls f, g zwei lineare unabhängige Lösungen von (1.51) (d.h. $W(f,g) \neq 0$) sind, haben wir die folgende Darstellungsformelen

$$\begin{aligned} c(z,x,x_0) &= \frac{p(x_0)g'(x_0)f(x) - p(x_0)f'(x_0)g(x)}{W(f,g)}, \\ s(z,x,x_0) &= \frac{-g(x_0)f(x) + f(x_0)g(x)}{W(f,g)}, \end{aligned} \tag{1.55}$$

aufgrund von (1.17): $\Pi(z,x,x_0) = \Phi(z,x)\Phi(z,x_0)^{-1}$ mit
$\Phi(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ p(x)f'(x) & p(x)g'(x) \end{pmatrix}$ und $\det \Phi = W(f,g)$.
Mit (1.21) folgt die allgemeine Lösung

$$u(x) = u(x_0)c(z,x,x_0) + p(x_0)u'(x_0)s(z,x,x_0) - \int_{x_0}^{x} s(z,x,y)r(y)w(y)\,\mathrm{d}y \tag{1.56}$$

von der inhomogenen DGL

$$\begin{aligned} &-(p(x)u'(x))' + (q(x) - zw(x))u(x) = r(x)w(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b), \\ &\text{d.h. } \vec{u}' = A\vec{u} + \vec{r} \text{ mit } \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -rw \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit (1.55) lautet (1.56)

$$\begin{aligned} u(x) = &\frac{f(x)}{W(f,g)}\Big((pug')(x_0) - (pu'g)(x_0) + \int_{x_0}^{x} (grw)(y)\,\mathrm{d}y\Big) \\ &+ \frac{g(x)}{W(f,g)}\Big(-(puf')(x_0) + (pu'f)(x_0) - \int_{x_0}^{x} (frw)(y)\,\mathrm{d}y\Big). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Operator-Formulierung Wir betrachten den Operator

$$T = \frac{1}{w(x)}\Big(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\Big), \tag{1.58}$$

wobei $p \in C^1([a,b];\mathbb{R})$, $q, w \in C([a,b];\mathbb{R})$ mit $p(x), w(x) > 0$ $(x \in [a,b])$ gegeben sind. Die homogene Differentialgleichung (1.51) ist (formel) äquivalent zum Eigenwertproblem des Operators T:

$$Tu = zu. \tag{1.59}$$

Offensichtlich kann der Operator T nicht alle stetige Funktionen in $C([a,b];\mathbb{C})$ anwenden. Wir nehmen den folgenden Definitionsbereich für den Operator T:

$$D(T) = \{u \in C^2([a,b];\mathbb{C}) \,|\, U_a[u] = U_b[u] = 0\}, \tag{1.60}$$

wobei (mit zwei Parameters $\alpha, \beta \in [0,\pi)$)

$$\begin{aligned} U_a[u] &:= \cos(\alpha)u(a) - \sin(\alpha)p(a)u'(a), \\ U_b[u] &:= \cos(\beta)u(b) - \sin(\beta)p(b)u'(b). \end{aligned}$$

Falls $\alpha = 0$, heißt $u(a) = 0$ die Dirichlet-Randbedingung am Punkt a. Falls $\alpha = \pi/2$, heißt $u'(a) = 0$ die Neumann-Randbedingung am Punkt a. Im allgemeinen Fall heißt $U_a[u] = 0$ die Robin-Randbedingung am Punkt a. Bemerken dass man o.B.d.A. $\alpha \in [0,\pi)$ annehmen kann.
Wir vorstellen ein Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle := \int_a^b \overline{u}(x)v(x)w(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ mit } 0 < w \in C([a,b];\mathbb{R}^+)$$

in $C([a,b];\mathbb{C})$, wobei der Querstrich die komplexe Konjugation bezeichnet. D.h. die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a,b];\mathbb{C}) \times C([a,b];\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}$ ist linear im zweiten Argument und semilinear im ersten Argument (d. h. Sesquilinearform[2]), und erfüllt

- $\langle u, u\rangle > 0$ für $u \neq 0$;
- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$.

Wir bezeichnen den Skalarproduktraum $\mathfrak{H}_0 := (C([a,b];\mathbb{C}); \langle\cdot,\cdot\rangle)$, und $\mathfrak{H}_0$ ist nicht vollständig bzgl. der induzierten Norm [3]

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Da $U_a[\cdot], U_b[\cdot]$ linear sind, ist $D(T)$ ein Unterraum von $\mathfrak{H}_0$. Die Menge der zweimal differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger $C_c^2((a,b))$ ist dicht in $\mathfrak{H}_0$ (Übung). Deshalb ist $D(T) \subset \mathfrak{H}_0$ dicht.
Wir zeigen jetzt, dass der Operator $T : D(T) \mapsto \mathfrak{H}_0$ symmetrisch ist, d.h.

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle, \quad \forall u, v \in D(T).$$

[2]Manchmal wird stattdessen auch Linearität im ersten und Semilinearität im zweiten Argument gefordert.
[3]Wir können den Raum $\mathfrak{H}_0$ vervollständigen, s.d. der vervollständige Raum ein Hilbertraum ist.

Wir rechnen

$$
\begin{aligned}
\langle Tu, v\rangle &= \int_a^b (-(p\overline{u}')' + q\overline{u})v \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Partielle Integration}}{=} -\big((p\overline{u}')v\big)\big|_a^b + \int_a^b \overline{u}'(pv') + \overline{u}(qv)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Partielle Integration}}{=} -\big((p\overline{u}')v\big)\big|_a^b + \big(\overline{u}pv'\big)\big|_a^b + \int_a^b \overline{u}(-(pv')' + qv)\,\mathrm{d}x \\
&= -W_a(\overline{u}, v) + W_b(\overline{u}, v) + \langle u, Tv\rangle \quad \forall u, v \in C^2([a,b]).
\end{aligned}
$$

Falls $u, v \in D(T)$, haben wir (Übung)

$$
-W_a(\bar{u}, v) + W_b(\overline{u}, v) = 0,
$$

und ist der Operator T deshalb symmetrisch.

[28.04.2021]

[04.05.2021]

Inverse & Eigenwerten des Operators Da T nicht notwendig Injektion ist (d.h. 0 kann ein Eigenwert sein: $Tu = 0$ hat nichttriviale Lösungen), betrachten wir $T - z$ mit einem festen Parameter $z \in \mathbb{C}$. Um die Inverse $(T-z)^{-1}$ zu rechnen sollen wir die inhomogenen Differentialgleichung

$$
(T - z)u = r \tag{1.61}
$$

lösen. Äquivalent suchen wir die eindeutige Lösung

$$
u \in D(T) = \{u \in C^2([a,b]) \mid U_a[u] = U_b[u] = 0\}
$$

von $(T - z)u = r$, d.h. wir suchen die eindeutige Lösung $u \in C^2([a,b])$ vom inhomogenen Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
L_{SL}[u] &= -(p(x)u'(x))' + (q(x) - zw(x))u(x) = w(x)r(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b), \\
U_a[u] &= U_b[u] = 0.
\end{aligned} \tag{1.62}
$$

Mit Hilfe von (1.57) kann man die allgemeine Lösungen der inhomogenen DGL (1.61) (bzw. (1.62)) ausdrucken durch

$$
u(z,x) = \frac{u_b(z,x)}{W(u_b, u_a)(z)}\Big(c_1 + \int_a^x u_a(z,y)(rw)(y)\,\mathrm{d}y\Big)
$$

$$+\frac{u_a(z,x)}{W(u_b,u_a)(z)}\Big(c_2+\int_x^b u_b(z,y)(rw)(y)\,\mathrm{d}y\Big), \tag{1.63}$$

wobei c_1, c_2 zwei Parameters sind und $u_a(z,x)$, $u_b(z,x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL (mit eigneten Anfangswerten, die von c_1, c_2 abhängen) sind. Wir möchten c_1, c_2 sowie u_a, u_b bestimmen, sodass die obig definierte Funktion u in $D(T)$ liegt. Wir werden sehen, ob eine solche Funktion u existiert, hängt vom Parameter z ab.
Hier ist die Idee. Sei $c_1 = 0$, dann gilt

$$u(z,a) = cu_a(z,a) \text{ mit } c = \frac{c_2 + \langle \overline{u_b}, r\rangle}{W(u_b,u_a)(z)}.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} u'(z,x) = &\frac{u_b'(z,x)}{W(u_b,u_a)(z)}\Big(c_1+\int_a^x u_a(z,y)(rw)(y)\,\mathrm{d}y\Big) \\ &+\frac{u_a'(z,x)}{W(u_b,u_a)(z)}\Big(c_2+\int_x^b u_b(z,y)(rw)(y)\,\mathrm{d}y\Big). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$u'(z,a) = cu_a'(z,a).$$

Deshalb erhalten wir

$$U_a[u] = cU_a[u_a].$$

Sei $u_a \in C^2([a,b];\mathbb{C})$ die Lösung der homogenen DGL mit Anfangswert $U_a[u_a] = 0$, und wir fixieren zukünftig den Anfangswerten für u_a:

$$u_a(z,a) = \sin(\alpha) \text{ und } p(a)u_a'(z,a) = \cos(\alpha).$$

Dann haben wir

$$U_a[u] = 0.$$

Ähnlich nehmen wir $c_2 = 0$ und $u_b \in C^2([a,b];\mathbb{C})$ die Lösung der homogenen DGL mit Anfangswert $U_b[u_b] = 0$:

$$u_b(z,b) = \sin(\beta) \text{ und } p(b)u_b'(z,b) = \cos(\beta),$$

sodass

$$U_b[u] = \frac{\langle \overline{u_a}, r\rangle}{W(u_b,u_a)(z)} U_b[u_b] = 0.$$

Wir haben dann die eindeutige Lösung (1.63):

$$\frac{u_b(z,x)}{W(u_b,u_a)(z)}\int_a^x u_a(z,y)(rw)(y)\,\mathrm{d}y+\frac{u_a(z,x)}{W(u_b,u_a)(z)}\int_x^b u_b(z,y)(rw)(y)\,\mathrm{d}y$$

vom RWP (1.62) gefunden (Überprüfung für den Fall $W(u_b,u_a)(z)\neq 0$).
Die obige Idee funktioniert, solange die Wronskian $W(u_b,u_a)(z)$ keine Nullen hat. Wir haben dann die folgende Alternative für den Parameter $z\in\mathbb{C}$ (im Vergleich mit Satz 1.1):

- Falls $W(z):=W(u_b,u_a)(z)\neq 0$, ist die Inverse $(T-z)^{-1}$ wohldefiniert:

  $$\begin{aligned}u(z,x)=(T-z)^{-1}r=&\frac{u_b(z,x)}{W(z)}\int_a^x u_a(z,y)(rw)(y)\,\mathrm{d}y\\&+\frac{u_a(z,x)}{W(z)}\int_x^b u_b(z,y)(rw)(y)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}\tag{1.64}$$

  D.h. Das RWP (1.62) ist eindeutig lösbar für alle $r\in C([a,b];\mathbb{C})$.

- Falls $W(z)=0$, sind u_a und u_b linear abhängig: $u_b(z,x)=d(z)u_a(z,x)$. D.h. $U_a[u_b]=d(z)U_a[u_a]=0$ und $0\neq u_b\in D(T)$ ist eine Eigenfunktion des Operators T bzgl. des Eigenwerts z: $(T-z)u_b=0$.

  D.h. Das homogene RWP (1.62) hat nicht triviale Lösung.

D.h. die ganze Funktion $W(z)$ verschwindet genau bei den Eigenwerten des Operators T. Deshalb hat T nur diskrete Eigenwerten.
Bemerken dass falls $u(z,x)$ (1.62): $(T-z)u=0$ erfüllt, erfüllt $\overline{u}(z,x)$ dann $(T-\overline{z})u=0$. Deshalb hat das Anfangswertproblem $(T-\overline{z})u=0$ mit

$$\begin{aligned}&u(z,a)=\sin(\alpha)\text{ und }p(a)u'(z,a)=\cos(\alpha)\\&\text{bzw. }u(z,b)=\sin(\beta)\text{ und }p(b)u'(z,b)=\cos(\beta)\end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung

$$\begin{aligned}&u_a(\overline{z},x)=\overline{u_a}(z,x)\\&\text{bzw. }u_b(\overline{z},x)=\overline{u_b}(z,x).\end{aligned}$$

D.h. $W(\overline{z})=\overline{W(z)}$ und $u_a(z,\cdot)|_{z\in\mathbb{R}},u_b(z,\cdot)|_{z\in\mathbb{R}}\in C^2([a,b];\mathbb{R})$, $W:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$. Insbesondere sind alle Eigenwerten von T reellwertig: Falls $0\neq u\in D(T)$ eine Eigenfunktion mit $Tu=zu$ ist, gilt es dann

$$\overline{z}\langle u,u\rangle=\langle zu,u\rangle=\langle Tu,u\rangle\overset{\text{T symmetrisch}}{=}\langle u,Tu\rangle=z\langle u,u\rangle\overset{u\neq 0}{\Rightarrow}z\in\mathbb{R}\,.$$

Resolvente des Operators Wir betrachten jetzt nur den Fall

$W(z) \neq 0$(d.h. z ist keiner Eigenwert von T)
$\Leftrightarrow U_a[u_b] \neq 0 \quad \& \quad U_b[u_a] \neq 0$
$\Leftrightarrow (T-z)u = 0$ hat nur Triviallösung
d.h. das RWP (1.62) mit $r = 0$ hat nur Triviallösung
$\Leftrightarrow (T-z)u = r$ hat eine eindeutige Lösung für alle $r \in C([a,b];\mathbb{C})$
d.h. das RWP (1.62) hat eine eindeutige Lösung für alle $r \in C([a,b];\mathbb{C})$.

Wir schreiben die Lösungsformel (1.64) wie

$$R_T(z)r(x) := \int_a^b G(z,x,y)w(y)r(y)\,\mathrm{d}y \ \text{ mit } R_T : \mathfrak{H}_0 \mapsto D(T), \tag{1.65}$$

wobei

$$G(z,x,y) = \frac{1}{W(z)} \begin{cases} u_a(z,x)u_b(z,y) & \text{auf } \Delta_+, \\ u_a(z,y)u_b(z,x) & \text{auf } \Delta_-, \end{cases} \tag{1.66}$$

die Greensche Funktion zu der Randwertaufgabe: (L_{SL}, U_a, U_b) ist (Übung: Überprüfen Sie die Eigenschaften der Greenschen Funktion in (1.41)-(1.42)-(1.43) & Herleiten Sie diese Greensche Funktion nach (1.48)). Dieser Greensche Funktion erfüllt auch

$$G(\overline{z},x,y) = \overline{G(z,x,y)}.$$

Mit Definition folgt

$$(T-z)R_T(z)r = r.$$

Wir können auch einfach rechnen für $v \in D(T)$ (Übung: Mit partieller Integration)

$$\begin{aligned} R_T(z)(T-z)v &= \int_a^b G(z,x,y)w(y)((T-z)v)(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{u_b(z,x)}{W(z)} \int_a^x u_a(z,y)w(y)((T-z)v)(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \frac{u_a(z,x)}{W(z)} \int_x^b u_b(z,y)w(y)((T-z)v)(y)\,\mathrm{d}y \ = \cdots = v. \end{aligned}$$

Der Operator $R_T(z) = (T-z)^{-1} : \mathfrak{H}_0 \mapsto D(T)$ heißt die Resolvente vom Operator T.

[04.05.2021]

Dieser Operator $R_T(z) : \mathfrak{H}_0 \mapsto D(T)$ ist kompakt, d.h. für jede beschränkte Folge $(v_n) \subset \mathfrak{H}_0$ hat die Folge $(R_T(z)v_n) \subset D(T)$ eine konvergente Teilfolge in $\mathfrak{H}_0$: Es folgt direkt aus den Eigenschaften der Greenschen Funktion (Übung). Falls $z \in \mathbb{R}$, ist der Operator $R_T(z)$ symmetrisch: Es folgt auch direkt aus dem Eigenschaft der Greeschen Funktion (Übung).

Spektralsatz für T Mit der Spektraltheorie für kompakte symmetrische Operatoren (der Beweis kommt später) existieren endlich oder abzählbar unendlich viele reelle Eigenwerten $(\lambda_j) \subset \mathbb{R}$ (die gegen 0 konvergieren) für den Operator $R_T(z)$ (mit einem festen $z \in \mathbb{R}$). Die entsprechende normalisierte Eigenvektor $(v_j) \subset D(T)$ mit $\|v_j\| = 1$ bilden eine orthonormale Basis in $\mathfrak{H}_0$ (da $\mathrm{Ran}(R_T(z)) = D(T)$ dicht in $\mathfrak{H}_0$ ist), s.d. jedes $v \in \mathfrak{H}_0$ ausgedruckt werden kann wie

$$v = \sum_j \langle v_j, v\rangle v_j.$$

Da $R_T(z)v_j = \lambda_j v_j$ äquivalent zu $Tv_j = (z + \frac{1}{\lambda_j})v_j$ ist, sind

$$(z_j)_j := (z + \frac{1}{\lambda_j})_j \subset \mathbb{R}$$

die Eigenwerten von T mit entsprechenden Eigenvektor v_j. Deshalb hat der Operator T abzählbar viele diskrete und reelle Eigenwerten (z_j), die nur bei unendlich ∞ akkumulieren können.

Jeder Eigenwert z_j ist eigentlich einfach: Falls $u_j, v_j \in D(T)$ zwei verschiedene Eigenfunktions (die dem Eigenwert z_j entsprechen) sind, haben wir dann

$$U_a[u_j] = U_a[v_j] = 0 \Rightarrow W_a(u_j, v_j) = 0 \Leftrightarrow u_j, v_j \text{ sind linear abhängig.}$$

Deshalb ist $v_j(x)$ ein Vielfaches von $u_a(z_j, x)$ mit $u_a(z,\cdot)|_{z\in\mathbb{R}} \in C([a,b];\mathbb{R})$, und kann reellwertig gewählt werden.

Falls $v \in D(T)$, konvergiert die Reihe $\sum_j \langle v_j, v\rangle v_j$ gleichmäßig in $[a,b]$: Sei $v = R_T(z)h$ ($z \in \mathbb{R}$) für $h \in \mathfrak{H}_0$, und wir haben

$$\begin{aligned}\sum_j \langle v_j, v\rangle v_j &= \sum_j \langle v_j, R_T(z)h\rangle v_j = \sum_j \langle v_j, h\rangle \lambda_j v_j = \sum_j \langle v_j, h\rangle (R_T(z)v_j)\\ &= \sum_j \langle v_j, h\rangle \underbrace{\int_a^b G(z,x,y)v_j(y)w(y)\,\mathrm{d}y}_{\langle v_j, G(z,x,\cdot)\rangle},\end{aligned}$$

mit $\max_{x\in[a,b]} |\langle v_j, G(z,x,\cdot)\rangle| < \infty$.

Zusammenfassen haben wir

Satz 1.3 (Spektralsatz für T)**.** *Der durch* (1.58)-(1.60) *definierte Operator* T *hat abzählbar viele diskrete reelle einfach Eigenwerten* (z_j)*, die nur bei unendlich akkumukieren können. Die entsprechende normalisierte Eigenfunktionen* $(v_j) \subset D(T)$ *können reellwertig gewählt sein und bilden eine orthonormale Basis in* $\mathfrak{H}_0 = (C([a,b];\mathbb{C});\langle\cdot,\cdot\rangle)$*:*

$$v = \sum_j \langle v_j, v\rangle v_j, \quad \forall v \in \mathfrak{H}_0.$$

Außerdem konvergiert diese Reihe gleichmäßig für $v \in D(T)$*.*

Beispiel in $L^2([0,1])$ Wir betrachten den Fall $p(x) = w(x) = 1$, $q(x) = 0$, $[a,b] = [0,1]$, $\alpha = \beta = 0$, d.h.

$$L_{SL}[u] = -u''(x) - zu(x), \quad U_0[u] = u(0), \quad U_1[u] = u(1),$$

und

$$T = -\frac{d^2}{dx^2}$$

mit $D(T) = \{u \in C^2([0,1]) \,|\, U_0[u] = U_1[u] = 0\}$ eine dichte Unterraum in

$$\mathfrak{H}_0 = (C([0,1]);\langle\cdot,\cdot\rangle), \quad \langle u,v\rangle = \int_0^1 \overline{u}(x)v(x)\,\mathrm{d}x \;= \langle u,v\rangle_{L^2([0,1])}.$$

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$-u'' - zu = 0, \quad u(0) = 0 \text{ und } u'(0) = 1 \text{ bzw. } u(1) = 0 \text{ und } u'(1) = 1$$

lautet

$$\begin{aligned} &u_a(0,x) = x \text{ bzw. } u_b(0,x) = -1 + x \text{ für } z = 0,\\ &u_a(z,x) = \frac{e^{i\sqrt{z}x} - e^{-i\sqrt{z}x}}{2i\sqrt{z}} \text{ bzw. } u_b(z,x) = \frac{e^{i\sqrt{z}(x-1)} - e^{i\sqrt{z}(1-x)}}{2i\sqrt{z}} \text{ für } z \neq 0, \end{aligned}$$

wobei $\sqrt{z}$ mit nichtnegativen Imaginärteil ist. Die Wronskian

$$W(u_b,u_a)(z) = u_b u_a' - u_b' u_a = -1 (\text{für } z = 0) \text{ bzw. } \frac{e^{-i\sqrt{z}} - e^{i\sqrt{z}}}{2i\sqrt{z}} (\text{für } z \neq 0)$$

hat Nullen genau am

$$z_n = (n\pi)^2, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Eigenwerten bzw. die entsprechende normalisierte Eigenfunktions von T sind

$$z_n = (n\pi)^2, \quad v_n = \sqrt{2}\sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jede Funktion $v \in \mathfrak{H}_0$ kann zu Fourier-Sinusreihen erweitert werden:

$$v = \sum_n c_n v_n \text{ mit } c_n := \langle v_n, v\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 \sin(n\pi x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Falls $v \in D(T)$, konvergiert die obige Fourier-Sinusreihen gleichmäßig.
Falls z keiner Eigenwert von T ist (d.h. das Randwertproblem (1.62) ist eindeutig lösbar), lautet die Resolvente (d.h. die eindeutige Lösung des Randwertproblems (1.62) siehe auch Satz 1.2)

$$R_T(z)r(x) = \int_0^1 G(z,x,y)r(y)\,\mathrm{d}y,$$

mit $G(0,x,y)$ durch (1.39) gegeben und

$$G(z,x,y) = \begin{cases} \frac{(e^{i\sqrt{z}x}-e^{-i\sqrt{z}x})(e^{i\sqrt{z}(y-1)}-e^{i\sqrt{z}(1-y)})}{2i\sqrt{z}(e^{-i\sqrt{z}}-e^{i\sqrt{z}})} & \text{auf } \Delta_+, \\ \frac{(e^{i\sqrt{z}y}-e^{-i\sqrt{z}y})(e^{i\sqrt{z}(x-1)}-e^{i\sqrt{z}(1-x)})}{2i\sqrt{z}(e^{-i\sqrt{z}}-e^{i\sqrt{z}})} & \text{auf } \Delta_-, \end{cases} \quad \text{für } z \neq 0.$$

[05.05.2021]

[11.05.2021]

2 Elliptische Randwertaufgaben (2. Ordnung)

Lineare PDGn zweiter Ordnung Wir betrachten die lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &L[u](x) = r(x) \ (x \in \Omega) \\ &\text{mit } L[u](x) := \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\Big) + \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big) + c(x)u(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (offen und zusammenhängend), $n \geqslant 2$. Hier sind die Koeffizienten a_{ij}, b_j, c sowie der Quellterm r in $C(\Omega; \mathbb{R})$ gegeben.

Setzen $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Wir können (2.1) kurz schreiben wie

$$L[u] = r \text{ mit } L[u] = \mathrm{Spur}(AD^2u) + \vec{b} \cdot \nabla u + cu, \tag{2.2}$$

und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass A eine symmetrische Matrix ist (da Spur $(AD^2u) =$ Spur $(A^T D^2 u) =$ Spur $(\frac{A+A^T}{2} D^2 u)$).
Die PDG (2.1) heißt im Punkt $x \in \Omega$

- elliptisch, falls alle Eigenwerte von $A(x)$ (oder $-A(x)$) positiv sind;
- parabolisch, falls $A(x)$ den Eigenwert 0 hat;
- hyperbolish, falls $A(x)$ (oder $-A(x)$) $(n-1)$-positiven und 1-negativen Eigenwert hat.

Sei $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$. Die PDG (2.1) heißt elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch in $\widetilde{\Omega}$, falls (2.1) in jedem Punkt $x \in \widetilde{\Omega}$ elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch ist.
Beispiele:

- die Laplace-Gleichung $\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j x_j} u = 0$ (mit $A(x) = \mathrm{Id}$) ist elliptisch in $\mathbb{R}^n$;
- die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \Delta_x u = -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j x_j} u + \partial_t u = 0$ ist parabolisch in $\mathbb{R}^{n+1}_+$;
- die Wellengleichung $\partial_{tt} u - \Delta_x u = \partial_{tt} u - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j x_j} u = 0$ ist hyperbolisch in $\mathbb{R}^{n+1}$;
- die Tricomi-Gleichung $x_2 \partial^2_{x_1} u - \partial^2_{x_2} u = 0$ ist elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch in

  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < 0\}$ bzw. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ bzw. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$.

Randbedingungen Sei $\Gamma_1, \cdots \Gamma_k \subset \partial\Omega$ $(n-1)$-dimensionale Hyperflächen (nicht notwendig verschieden). Sei $S_\nu \subset \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_k$ $(\nu = 1, \cdots, l)$ eine Teilmenge. Wir formulieren die Randbedingungen durch

$$\begin{aligned} &U_\nu[u] = 0 \ (\forall \nu = 1, \cdots, l) \\ &\text{mit } U_\nu[u] := R_\nu\big(x^{(1)}, u(x^{(1)}), \partial_{x_1} u(x^{(1)}), \cdots, \partial_{x_n} u(x^{(1)}), \cdots, \\ &\quad \cdots, x^{(k)}, u(x^{(k)}), \partial_{x_1} u(x^{(k)}), \cdots, \partial_{x_n} u(x^{(k)})\big) \ (\forall (x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}) \in S_\nu). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Falls jedes R_ν nur von einer Teil des Rands abhängt, kann die folgende Randbedingungen angenommen werden:

$$U_\nu[u] := R_\nu\big(x, u(x), \partial_{x_1} u(x), \cdots, \partial_{x_n} u(x)\big) \ (\forall x \in \Gamma_\nu, \quad \forall \nu = 1, \cdots, l) \tag{2.4}$$

wobei $\Gamma_\nu \subset \partial\Omega$ mit $\cup_{\nu=1}^l \Gamma_\nu = \partial\Omega$.

Cauchy-Probleme Nicht alle PDGn sind für Randwertaufgaben „geeignet“. Gegenbeispiele: Die eindeutige Lösung von dem Cauchy-Problem der (eindimensionale) Wellengleichung

$$\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0 \quad (t, x \in [0, \infty) \times \mathbb{R}), \quad u|_{t=0} = g(x) \text{ und } \partial_t u|_{t=0} = h(x) \ (x \in \mathbb{R})$$

ist durch D'Alembert-Formel gegeben

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Eine Lösung (eigentlich die eindeutige Lösung mit exponentiellen Wachstum am Unendlich) von dem Cauchy-Problem der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0 \quad (t, x \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n), \quad u|_{t=0} = g(x) \ (x \in \mathbb{R}^n)$$

ist gegeben durch

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4t}) g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Im wesentlichen sind nur elliptische PDGn adäquat für Randwertprobleme (ihr Cauchy-Problem ist nicht wohlgestellt), und wir werden in diesem Kapitel die elliptische Randwertaufgaben zweiter Ordnung betrachten.

Elliptische Randwertaufgaben Die Lösungen der linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung (1.12): $\sum_{m=0}^{n} a_m u^{(m)} = 0$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum, und wir können ein Fundamentalsystem $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ nehmen und die Matrix $(U_j[\varphi_l])_{j,l=1,\cdots,n}$ betrachten, um den Alternativensatz 1.1 für die Randwertaufgaben von den gewöhnlichen DGLn zu beweisen.
Bei PDGn gibt es keine Fundamentalsysteme, d.h. der Lösungen einer linearen PDG ist unendlich-dimensional. Zum Beispiel: Falls $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ holomorph auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

D.h. die Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion lösen die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \text{ und } \Delta v = 0 \ (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2).$$

(Vice Versa: Falls $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ harmonisch auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist, existiert eine harmonische Funktion $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ s.d. $f = u + iv$ holomorph in Ω ist.)
Wir haben in der Existenztheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung gesehen: Falls die Koeffizienten sowie die Quellterme in $C([a,b])$ liegt, erhalten wir eine eindeutige Lösung $u \in C^2([a,b])$. Aber diese Beziehung „stetige Quellterme $\Rightarrow$ zweimal stetige differenzierbare Lösungen" ist bei PDGn im Allgemeinem falsch (siehe Courant-Hilbert II, Seite 272ff.). Wir werden nicht stetige Funktionen $C(\Omega)$ sondern Hölder-stetige Funktionen $C^\alpha(\Omega)$ $(\alpha \in (0,1))$ (d.h. die stetige Funktionen mit stetigen „fraktionellen" Ableitungen) betrachten, und wir werden in Abschnitt 2.1 die eindeutige klassische Lösung im Hölderraum $C^{2,\alpha}(\Omega)$ von der Dirichlet-Randwertaufgabe finden (siehe Satz 2.4). Im Allgemeinem (ohne Positivitätsannahme) gilt ein Alternativsatz (siehe Satz 2.5). Wir werden zwar die allgemeine elliptische PDG zweiter Ordnung betrachten

$$L[u] = \Big(- \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b^j D_j + c \Big) u = r \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega, \tag{2.5}$$

wobei die (streng) Ellipzität bedeutet: $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und eine positive Konstante $\lambda > 0$. Wir nehmen $C^{2,\alpha}$-Gebiet Ω, $C^{2,\alpha}$-Randwert φ und $C^\alpha(\overline{\Omega})$-Koeffizienten (d.h. $a^{ij}, b^j, c \in C^\alpha(\overline{\Omega})$) sowie Quellterm r, s.d. (2.5) eindeutig lösbar in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ unter der Positivitätannahme ist

$$c \geqslant 0.$$

Der Beweis hängt von der Schauder-Abschätzung sowie dem Maximum- und Minimumprinzip ab: Wir werden dann die Abschätzungen für das Newton-Potential bzw. die Lösungen der Poisson-Gleichung bzw. die Lösungen der allgemeinen elliptischen PDG im Abschnitt 2.1.2 bzw. 2.1.3 bzw. 2.1.4 erstellen.

Wir stoßen aber oft auf das Randwertproblem mit weniger glatten Daten, und wir möchten dann die Definition der Lösungen abschwächen: Wir suchen z.B. eine Sobolev-Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ der elliptischen PDG in Divergenzform

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + \vec{b} \cdot \nabla u + cu = r & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

im schwachen (integralen) Sinne:

$$B[u, \varphi] = F[\varphi], \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

wobei B eine Bilinearform

$$B[u, \varphi] := \int_\Omega \Big((\nabla u)^T A \nabla \varphi + \vec{b} \cdot \nabla u \varphi + cu\varphi \Big) \, \mathrm{d}x$$

und $F = \int_\Omega r\varphi \, \mathrm{d}x$ ein lineares Funktional sind. Die schwach formulierte elliptische PDG zweiter Ordnung ist auch unter etwas Positivitätsannahme eindeutig lösbar (siehe Satz 2.8), und im Allgemeinen gilt ein Alternativensatz (siehe Satz 2.9)

2.1 Klassische Lösungen des Dirichlet-Problems

2.1.1 Laplace- und Poisson-Gleichung

Wir erinnern uns an die klassische Theorie für die Randwertaufgaben der Laplace bzw. Poission-Gleichung. Der Beweis kann im Skript zur Vorlesung „Klassische Methode für partielle Differentialgleichungen“ oder im Buch [3] gefunden werden.

Fundamentallösung und Greensche Funktion Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung $\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j x_j} u = 0$ lautet

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{-(n-2)} & n \geqslant 3, \end{cases} \tag{2.6}$$

wobei $\omega_n = |\partial B_1(0)|$ das Volumen der Einheitskugel in R^n bezeichnet. Die Fundamentallösung hat die folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma(x) = 0 \text{ für } x \neq 0,\\
&\partial_{x_j}\Gamma = -\frac{1}{\omega_n}\frac{x_j}{|x|^n} \text{ für } x \neq 0,\\
&\partial_{x_i x_j}\Gamma = -\frac{1}{\omega_n}\Big(\frac{1}{|x|^n}\delta_{ij} - n\frac{x_i x_j}{|x|^{n+2}}\Big) \text{ für } x \neq 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

und wir haben die folgende Darstellung für jede auf einem beschränkten Lipschitzgebiet Ω definierte Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)(-\Delta u(y))\,\mathrm{d}y + \oint_{\partial\Omega}\Big(\Gamma(x-y)\nabla u(y) - u(y)\nabla_y\Gamma(x-y)\Big)\cdot\nu_y\,d\sigma_y$$

wobei $x \in \Omega$ und ν der äussere Einheitsnormalvektor von $\partial\Omega$ bezeichnet.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Falls $w(x,y)$ eine auf Ω definierte Funktion mit

$$\begin{aligned}
&w(x,\cdot) \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ und } \Delta_y w(x,\cdot) = 0, \quad \forall x \in \Omega\\
&w(x,y) = -\Gamma(x-y) \text{ für } x \in \Omega \text{ und } y \in \partial\Omega
\end{aligned}$$

ist, definieren wir die Funktion

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) + w(x,y) \text{ für } x \neq y, x \in \Omega \text{ und } y \in \overline{\Omega} \tag{2.8}$$

Greensche Funktion zum Laplace-Operator auf Ω[4] (vergleiche mit den Greenschen Funktionen, die die Eigenschaften (1.41)-(1.42)-(1.43) haben). Wir haben dann die Greensche Darstellung für jede Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)(-\Delta u(y))\,\mathrm{d}y - \oint_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu_y}\,d\sigma_y, \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.9}$$

d.h. die Lösung für die Randwertaufgabe von Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = r \text{ in } \Omega \text{ und } u|_{\partial\Omega} = \varphi, \tag{2.10}$$

kann durch (vergleiche mit (1.49))

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)r(y)\,\mathrm{d}y - \oint_{\partial\Omega}\varphi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu_y}\,d\sigma_y, \quad \forall x \in \Omega,$$

[4]Die Greensche Funktion hängt symmetrisch von ihren Argumenten ab:

$$G(x,y) = G(y,x) \text{ für } x, y \in \Omega \text{ mit } x \neq y.$$

ausgedruckt werden.
Insbesondere lautet die Greensche Funktion auf $\Omega = B_1(0)$

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(x-y) - \Gamma(|x|(\frac{x}{|x|^2} - y)) & x \neq 0, \\ \Gamma(y) - 1_{\{n\geqslant 3\}}\frac{1}{(n-2)\omega_n} & x = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Mit Hilfe von (2.9) löst die Funktion

$$u(x) = -\oint_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma_y = \oint_{\partial B_1(0)} \frac{1-|x|^2}{\omega_n |x-y|^n}\varphi(y)\, d\sigma_y, \quad \forall x \in B_1(0)$$

eindeutig die Dirichlet-Randwertaufgabe der Laplace-Gleichung auf $\Omega = B_1(0)$

$$\Delta u = 0 \text{ in } B_1(0) \text{ und } u|_{\partial B_1(0)} = \varphi \in C(B_1(0)). \tag{2.12}$$

[11.05.2021]

[12.05.2021]

Laplace-Gleichung Im Allgemeinen ist es schwierig, die (eindeutige) Greensche Funktion für ein beliebiges Lipschitzgebiet zu finden. Wir können die Dirichlet-Randwertaufgabe der Laplace-Gleichung auf einem beschränkten Gebiet Ω

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \text{ und } u|_{\partial\Omega} = \varphi \text{ mit } \varphi \in C(\partial\Omega;\mathbb{R}) \tag{2.13}$$

mit Hilfe von Perron's Methode lösen: Man möchte die Lösung mit Hilfe von Erhöhung bzw. Abnahme der Unterfunktionen bzw. Oberfunktionen zu (2.13) finden.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u \in C(\Omega;\mathbb{R})$. Die Funktion u heißt subharmonisch bzw. superharmonisch in Ω, falls für jede Kugel $B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ gilt [5] [6]:

$$u(x_0) \leqslant M_R(x_0,u) \text{ bzw. } u(x_0) \geqslant M_R(x_0,u),$$

wobei

$$M_R(x_0,u) = \frac{1}{\frac{1}{n}\omega_n R^n}\int_{B_r(x_0)} u(y)\, d\sigma_y\, dr$$

der Durchschnittswert auf der Kugel $B_R(x_0)$ von u bezeichnet. Wir haben die folgende Charakterisierung einer harmonischen Funktion:

$$u \text{ ist harmonisch in } \Omega, \text{ d.h. } u \in C^2(\Omega) \text{ und } \Delta u = 0 \text{ in } \Omega,$$

[5] Wir können äquivalent die subharmonische bzw. superharmonische Funktionen durch den sphärischen Mittelwert $m_R(x_0,u) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\oint_{\partial B_R(x_0)} u(y)\, d\sigma_y$ definieren.

[6] Falls $u \in C^2(\Omega)$, kann man äquivalent die subharmonische bzw. superharmonische Funktion durch $-\Delta u \leqslant 0$ bzw. $-\Delta u \geqslant 0$ definieren.

$$\Leftrightarrow u \in C(\Omega) \text{ erfüllt } \text{“}u(x_0) = M_R(x_0, u)\ \forall x_0 \in \Omega \text{ mit } \overline{B_R(x_0)} \subset \Omega\text{”}.$$

Die harmonische Funktionen erfüllen die Harnacksche Ungleichung sowie die Cauchy-Abschätzung, die aus Durchschnittwert-Eigenschaft folgen. Sei u eine harmonische Funktion in einem Gebiet Ω und sei $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ ein Teilgebiet. Dann gelten die folgende Harnacksche Ungleichung

$$\max_{\overline{\Omega}_0} u \leqslant C(\Omega_0, \Omega) \min_{\overline{\Omega}_0} u \text{ für } u \geqslant 0, \tag{2.14}$$

sowie die folgende Cauchy-Abschätzung

$$\sup{}_{\Omega_0}|D^s u| \leqslant \left(\frac{nk}{\operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)}\right)^k \sup{}_{\Omega}|u| \text{ mit } k = |s|. \tag{2.15}$$

Eine harmonische Funktion ist eigentlich glatt aufgrund von Cauchy-Abschätzung. Sei $v \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$. Die Funktion v heißt Unterfunktion bzw. Oberfunktion zum Randwertproblem der Laplace-Gleichung (2.13), falls v subharmonisch bzw. superharmonisch in Ω und $v \leqslant \varphi$ bzw. $v \geqslant \varphi$ auf $\partial\Omega$. Die Funktion

$$u(x) := \inf\{v(x) \mid v \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \text{ ist Oberfunktion zu (2.13)}\} \tag{2.16}$$

ist harmonisch in Ω und heißt die Perron-Lösung von (2.13)[7].
Falls Ω in jedem Randpunkt die Kugelbedingung erfüllt:
D.h. in jedem Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine offene Kugel B mit

$$B \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \text{ und } \overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}, \tag{2.17}$$

erfüllt die obige Perron-Lösung die Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, d.h. die Perron-Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ löst das Randwertproblem (2.13) [8].

Maximum- und Minimumprinzip der harmonischen Funktionen Wir haben das Maximum- und Minimumprinzip der harmonischen Funktionen in einem beschränkten Gebiet Ω: Falls $u \in C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω, gilt

$$\min_{\partial\Omega} u = \min_{\overline{\Omega}} u, \quad \max_{\partial\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u. \tag{2.18}$$

Deshalb löst die Perron-Lösung eindeutig das Randwertproblem für die Laplace-Gleichung in einem beschränkten regulären Gebiet [9].

[7] Wir können ähnlich die Perron-Lösung durch $u(x) := \sup\{v(x) \mid v \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \text{ ist Unterfunktion zu (2.13)}\}$ definieren, die auch harmonisch in Ω ist. Aber die beide Definitions sind nicht benötigt gleich - es hängt von die geometrische Struktur des Rands $\partial\Omega$.

[8] Es gibt irreguläre Gebiete, wo die Perron-Lösung die Randbedingung nicht erfüllt.

[9] Das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung ist nicht benötigt eindeutig lösbar in einem unbeschränkten Gebiet.

Poisson-Gleichung Wir betrachten das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = r \text{ in } \Omega \text{ und } u|_{\partial\Omega} = \varphi, \tag{2.19}$$

in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit gegebenen Daten $\varphi \in C(\partial\Omega;\mathbb{R})$ und $r \in C(\Omega;\mathbb{R})$. Wir suchen die eindeutige Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ zu (2.19). Wir möchten die Poisson-Gleichung auf Laplace-Gleichung reduzieren. Sei r eine beschränkte stetige Funktion in Ω. Wir definieren das Newton-Potential von r auf Ω:

$$N_r^\Omega(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y) r(y) \,\mathrm{d}y\,, \tag{2.20}$$

wobei Γ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung bezeichnet. Da

$$\begin{aligned} \Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}), \quad |\nabla\Gamma| := \sup{}_{1\leqslant j\leqslant n}|\partial_{x_j}\Gamma| \leqslant \frac{1}{\omega_n}|x|^{1-n} \\ \text{und } |\nabla^2\Gamma| := \sup{}_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\partial^2_{x_ix_j}\Gamma| \leqslant \frac{n}{\omega_n}|x|^{-n} \text{ für } x \neq 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

gelten

$$\begin{aligned} &N_r^\Omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}) \text{ und } \Delta N_r^\Omega = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}, \\ &N_r^\Omega \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ und } \nabla N_r^\Omega(x) = \int_\Omega \nabla_x\Gamma(x-y) r(y)\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Aber es gilt $N_r^\Omega \in C^2(\mathbb{R}^n)$ nicht: Wir haben eigentlich

$$-\Delta N_1^\Omega = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega} \end{cases} \quad \text{mit } N_1^\Omega = \int_\Omega \Gamma(x-y)\,\mathrm{d}y \in C^2(\mathbb{R}^n\setminus\partial\Omega).$$

[12.05.2021]

[18.05.2021]

Es ist nicht genug, $N_r^\Omega \in C^2(\Omega)$ zu erhalten, wenn wir nur $r \in C(\Omega)$ annehmen:

$$\begin{aligned} &\int_{B_\varepsilon(0)} |x|^{-n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\varepsilon \omega_n\rho^{-1}\,\mathrm{d}\rho = \omega_n \ln\rho|_0^\varepsilon = -\infty \\ \rightsquigarrow &\int_{B_\varepsilon(0)} |x|^{-n+\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^\varepsilon \omega_n\rho^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\rho = \frac{\omega_n}{\alpha}\varepsilon^\alpha \to 0 \text{ für } \varepsilon\to 0, \quad \text{falls } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Wir sollten die Regularität erhöhen: $r \in C^\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$ (siehe (2.31) unten für die Definition) ist eine beschränkte Funktion und Ω ist ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. In diesem Fall gilt

$$N_r^\Omega \in C^2(\Omega) \text{ mit } -\Delta N_r^\Omega(x) = r(x) \text{ für } x \in \Omega,$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} N_r^\Omega(x) = \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Gamma(x-y) \underbrace{\left(r(y) - r(x)\right)}_{\leqslant [r]_{\alpha;x} |x-y|^\alpha} \mathrm{d}y \\ - r(x) \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) \nu_j(y) d\sigma_y}_{= -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} N_1(x)}, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.22}$$

Deshalb lautet die eindeutige Lösung von (2.19)

$$u(x) = N_r^\Omega(x) + v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

wobei $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die eindeutige Lösung vom folgenden Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung:

$$\Delta v = 0 \text{ in } \Omega \text{ und } v|_{\partial\Omega} = \varphi - \Big(\int_\Omega \Gamma(x-y) r(y)\, \mathrm{d}y \Big)|_{\partial\Omega}$$

bezeichnet.
Das obige Newtonische Potential N_r^Ω ist eigentlich $C^{2,\alpha}(\Omega)$ (Übung: Es folgt aus Lemma 2.1), und damit folgt $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (auf Grund der Cauchy-Abschätzung (2.15) ist die harmonische Funktion v glatt in Ω).

2.1.2 Hölder-Abschätzung für das Newton-Potential

Wir leiten in diesem Abschnitt die Hölder-Abschätzung für das Newton-Potential ab. Wir sollten immer darauf achten, ob die (Hölder-)Regularität bis zur Grenze eines Gebiets reicht oder nicht. Wir beginnen mit den Definitionen der stetigen Funktionen auf einer offenen bzw. abgeschlossenen Teilmenge in $\mathbb{R}^n$.

Räume Hölder-stetiger Funktionen Wir erinnern uns zunächst an die Räume stetiger Funktionen, die auf einer abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ definiert werden:

$$C(S) = C^0(S; \mathbb{R}(\mathbb{C})) = \{ f : S \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C}) \,|\, f \text{ stetig auf } S \}, \tag{2.23}$$

wobei die Stetigkeit von f das Fakt: $f(x_j) \to f(x)$ für $x_j \to x$ in S bedeutet. Mit der Norm

$$|f|_{0;S} := \|f\|_{C^0(S)} = \sup{}_{x \in S} |f(x)|$$

ist $C^0(S)$ ein Banachraum.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge (nicht benötigt beschränkt). Es sei $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω mit abgeschlossenen, beschränkten Mengen $K_m \subset \Omega$, d.h. es gelte

$$\Omega = \cup_m K_m, \quad K_m \subset K_{m+1}, \quad K \Subset \Omega \text{ kompakt } \Rightarrow K \subset K_m \text{ für ein } m. \tag{2.24}$$

Mit der Fréchet-Metrik

$$\rho(f) = \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m} \frac{|f|_{0;K_m}}{1 + |f|_{0;K_m}}$$

und der induzierten Abstand-Funktion $d(f,g) = \rho(f-g)$ ist der Raum stetiger Funktionen auf Ω

$$C(\Omega) = C^0(\Omega; \mathbb{R}(\mathbb{C})) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C}) \,|\, f \text{ stetig auf } \Omega\}, \tag{2.25}$$

ein vollständiger metrischer Raum. Beachte, dass Funktionen aus $C^0(\Omega)$ zum Rande der Menge Ω hin beliebig anwachsen können. Weiter definieren wir

$$C_0^0(\Omega) = \{f \in C^0(\Omega) \,|\, \mathrm{Supp}\,(f) \text{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega\}, \tag{2.26}$$

wobei

$$\mathrm{Supp}\,(f) = \overline{\{x \in \Omega \,|\, f(x) \neq 0\}}$$

der Träger von f ist.
Für $\alpha \in (0,1)$ und eine auf einer beschränkten Teilmenge D definierte Funktion f heißt

$$[f]_{\alpha;x_0} = \sup{}_{x\in D} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \tag{2.27}$$

Hölder-Konstante von f im Punkt x_0 (mit $x_0 \in D$) bzgl. D. Die Funktion f ist Hölder-stetig mit Exponent α im Punkt x_0, falls $[f]_{\alpha;x_0} < \infty$. Falls (2.27) für $\alpha = 1$ endlich ist, heißt f Lipschitz-stetig im Punkt x_0.
Die auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definierte Funktion f mit endlich

$$[f]_{\alpha;\Omega} = \sup{}_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

wird eine *gleichmäßig* Hölder-stetig Funktion mit Exponent α in Ω benennt. Falls $[f]_{\alpha;K} < \infty$ nur in allen kompakten Teilmenge $K \Subset \Omega$ gilt, heißt f eine *lokale* Hölder-stetig Funktion mit Exponent α in Ω.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann definieren wir für $k \geqslant 0$ und $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned} C^k(\overline{\Omega}) =& \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C}) \,|\, f \text{ ist k-mal stetig differenzierbar auf } \Omega \\ & \text{und } \partial_x^s f \text{ ist auf } \overline{\Omega} \text{ fortsetzbar für } |s| \leqslant k\}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\overline{\Omega}) \,|\, [\partial_x^s f]_{\alpha;\Omega} < \infty \, (|s| = k)\}. \tag{2.29}$$

Mit der Norm

$$|f|_{k;\Omega} = |f|_{k,0;\Omega} := \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{m=0}^{k} |D^m f|_{0;\Omega} \text{ mit } |D^m f|_{0;\Omega} := \sup_{|s|=m} \sup_{x\in\Omega} |\partial_x^s f(x)|,$$

$$\text{bzw. } |f|_{k,\alpha;\Omega} := \|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + [D^k f]_{\alpha;\Omega} \text{ mit } [D^k f]_{\alpha;\Omega} := \sup_{|s|=k} [\partial_x^s f]_{\alpha;\Omega},$$

ist $C^k(\overline{\Omega})$ bzw. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ Banachraum (Übung). Analog definieren wir

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C}) \,|\, f \text{ ist k-mal stetig differenzierbar auf } \Omega\}, \tag{2.30}$$

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) \,|\, \partial_x^s f (|s| = k) \text{ ist lokale Hölder-stetig mit Exponent } \alpha\}. \tag{2.31}$$

Mit der Fréchet-Metrik

$$\rho^k(f) = \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m} \frac{|f|_{k;K_m}}{1 + |f|_{k;K_m}},$$
$$\text{bzw. } \rho^{k,\alpha}(f) = \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m} \frac{|f|_{k,\alpha;K_m}}{1 + |f|_{k,\alpha;K_m}},$$

wobei die abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω bezeichnet, ist $C^k(\Omega)$ bzw. $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ein vollständiger metrischer Raum (Übung). Wir definieren weiter

$$C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) \,|\, \mathrm{Supp}\,(f) \text{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega\}, \tag{2.32}$$

und

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega),$$
$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \,|\, \mathrm{Supp}\,(f) \text{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega\}.$$

Mit der Fréchet-Metrik

$$\rho^\infty(f) = \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m} \frac{|f|_{m;K_m}}{1 + |f|_{m;K_m}}$$

ist $C^\infty(\Omega)$ ein vollständiger metrischer Raum.
Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ ist Hölder-stetig mit Exponent α im Punkt $x = 0$, und ist Lipschitz-stetig falls $\alpha = 1$.

- Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)y^\beta & y > 0, \\ 0 & y \leqslant 0 \end{cases}$$

mit $\beta \in (1,2)$ liegt in

$$C^1(\overline{\Omega}), \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < |x|^{1/2}, x^2 + y^2 < 1\}.$$

Aber $f \notin C^\alpha(\overline{\Omega})$ für $\alpha \in (\beta/2, 1)$, d.h. $C^\alpha(\overline{\Omega}) \not\subset C^1(\overline{\Omega})$ für dieses spitze Gebiet. (Übung)

Die Einbeziehung $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{k',\alpha'}(\overline{\Omega})$ gilt für $k + \alpha \geqslant k' + \alpha'$ und reguliere Gebiete (z.B. Lipschitz-Gebiet).

[18.05.2021]

[19.05.2021]

Hölder-Abschätzung des Newton-Potentials in den Kugeln Wir haben die folgende Hölder-Abschätzung für das Newton-Potential in den Kugeln, die die Abhängigkeit vom Radius zeigt.

Lemma 2.1. *Sei $B_1 := B_R(x_0)$, $B_2 := B_{2R}(x_0)$ zwei konzentrische Kugeln in $\mathbb{R}^n$. Falls $r \in C^\alpha(\overline{B}_2)$, $\alpha \in (0,1)$, gilt dann das Newton-Potential*

$$N_r^{B_2}(x) = \int_{B_2} \Gamma(x-y) r(y)\,\mathrm{d}y \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1)$$

und

$$|D^2 N_r^{B_2}|_{0;B_1} + R^\alpha [D^2 N_r^{B_2}]_{\alpha;B_1} \leqslant C(|r|_{0;B_2} + R^\alpha [r]_{\alpha;B_2}), \tag{2.33}$$

wobei $C = C(n,\alpha)$ eine positive Konstante bezeichnet.

Beweis. Mit (2.21) und (2.22):

$$\partial_{x_i x_j} N_r^{B_2}(x) = \int_{B_2} \partial_{x_i x_j}\Gamma(x-y)(r(y)-r(x))\,\mathrm{d}y - r(x)\oint_{\partial B_2} \partial_{x_i}\Gamma(x-y)\nu_j(y) d\sigma_y$$

folgt

$$|\partial_{ij} N_r^{B_2}(x)| \leqslant n[r]_{\alpha;B_2} \underbrace{\frac{1}{\omega_n}\int_{B_2} |x-y|^{\alpha-n}\,\mathrm{d}y}_{\leqslant \frac{1}{\omega_n}\int_{B_{3R}(x)} |x-y|^{\alpha-n}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha}(3R)^\alpha} + |r(x)| \underbrace{\frac{1}{\omega_n}\oint_{\partial B_2} |x-y|^{1-n}\,\mathrm{d}\sigma_y}_{\leqslant R^{1-n}(2R)^{n-1} = 2^{n-1}}$$

$$\leqslant (\frac{n}{\alpha}3^\alpha + 2^{n-1})(|r(x)| + R^\alpha [r]_{\alpha;B_2}), \quad \forall x \in \overline{B}_1.$$

Sei $\tilde{x} \in B_1$ ein andrer Punkt in B_1. Sei $\delta = |x - \tilde{x}|$ und $\xi = \frac{1}{2}(x + \tilde{x})$, s.d. die Fundamentallösungen $\Gamma(x-y)$, $\Gamma(\tilde{x}-y)$ keine Singularität für $y \notin B_\delta(\xi)$ hat, und

$$B_\delta(\xi) \subset B_{\frac{3}{2}\delta}(x), \quad B_\delta(\xi) \subset B_{\frac{3}{2}\delta}(\tilde{x}).$$

Dann (2.22)

$$\partial_{x_i x_j} N_r^{B_2}(\tilde{x}) = \int_{B_2} \partial_{x_i x_j}\Gamma(\tilde{x}-y)(r(y)-r(\tilde{x}))\,\mathrm{d}y - r(\tilde{x}) \oint_{\partial B_2} \partial_{x_i}\Gamma(\tilde{x}-y)\nu_j(y) d\sigma_y$$

liefert

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i x_j} N_r^{B_2}(\tilde{x}) - \partial_{x_i x_j} N_r^{B_2}(x) = & \int_{B_\delta(\xi)} \partial_{x_i x_j}\Gamma(\tilde{x}-y)(r(y)-r(\tilde{x}))\,\mathrm{d}y \\
& + \int_{B_\delta(\xi)} \partial_{x_i x_j}\Gamma(x-y)(r(x)-r(y))\,\mathrm{d}y \\
& + (r(x)-r(\tilde{x})) \int_{B_2 \setminus B_\delta(\xi)} \partial_{x_i x_j}\Gamma(\tilde{x}-y)\,\mathrm{d}y \\
& + \int_{B_2 \setminus B_\delta(\xi)} \big(\partial_{x_i x_j}\Gamma(\tilde{x}-y) - \partial_{x_i x_j}\Gamma(x-y)\big)(r(y)-r(\tilde{x}))\,\mathrm{d}y \\
& + (r(x)-r(\tilde{x})) \oint_{\partial B_2} \partial_{x_i}\Gamma(\tilde{x}-y)\nu_j(y) d\sigma_y \\
& + r(x) \oint_{\partial B_2} \big(\partial_{x_i}\Gamma(x-y) - \partial_{x_i}\Gamma(\tilde{x}-y)\big)\nu_j(y) d\sigma_y \\
:= & I_1 + \cdots + I_6.
\end{aligned}$$

Wir abschätzen I_k wie folgende:

$$|I_1| \leqslant \int_{B_{\frac{3}{2}\delta}(\tilde{x})} \frac{n}{\omega_n}|\tilde{x}-y|^{-n}[r]_{\alpha;B_2}|\tilde{x}-y|^\alpha\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{n}{\alpha}(\frac{3}{2}\delta)^\alpha [r]_{\alpha;B_2},$$

$$|I_2| \leqslant \frac{n}{\alpha}(\frac{3}{2}\delta)^\alpha [r]_{\alpha;B_2}(\text{ analog als für } I_1),$$

$$|I_3| \leqslant [r]_{\alpha;xB_2}|x-\tilde{x}|^\alpha \Big(\underbrace{\Big|\oint_{\partial B_2} \partial_{x_i}\Gamma(\tilde{x}-y)\nu_j(y)\,\mathrm{d}\sigma_y\Big|}_{\leqslant 2^{n-1}} + \underbrace{\Big|\oint_{\partial B_\delta(\xi)} \partial_{x_i}\Gamma(\tilde{x}-y)\nu_j(y)\,\mathrm{d}\sigma_y\Big|}_{\leqslant \frac{1}{\omega_n}(\frac{\delta}{2})^{1-n}\omega_n\delta^{n-1}=2^{n-1}} \Big) \leqslant 2^n\delta^\alpha [r]_{\alpha;B_2}$$

$$|I_4| \leqslant |x-\tilde{x}| \int_{B_2 \setminus B_\delta(\xi)} \big|D\partial_{x_i x_j}\Gamma(\hat{x}-y)\big| |r(y)-r(\tilde{x})|\,\mathrm{d}y \ \text{ für } \hat{x} \text{ zwischen } x \text{ und } \tilde{x}$$

$$\leqslant \frac{n^2(n+5)}{\omega_n}\delta[r]_{\alpha;B_2}\int_{|y-\xi|\geqslant\delta}\frac{|\tilde{x}-y|^\alpha}{|\hat{x}-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{|\tilde{x}-y|\leqslant\frac{3}{2}|\xi-y|\leqslant 3|\hat{x}-y|}{\leqslant} \frac{n^2(n+5)}{\omega_n}\delta[r]_{\alpha;B_2}(\frac{3}{2})^\alpha 2^{n+1}\int_{|y-\xi|\geqslant\delta}|\xi-y|^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \frac{n^2(n+5)}{1-\alpha}(\frac{3}{2})^\alpha 2^{n+1}\delta^\alpha[r]_{\alpha;B_2},$$

$$|I_5| \leqslant \delta^\alpha[r]_{\alpha;B_2}\Big|\oint_{\partial B_2}\partial_{x_i}\Gamma(\tilde{x}-y)\nu_j(y)d\sigma_y\Big| \leqslant 2^{n-1}\delta^\alpha[r]_{\alpha;B_2},$$

$$|I_6| \leqslant |r(x)||x-\tilde{x}|\oint_{\partial B_2}|D\partial_{x_i}\Gamma(\hat{x}-y)|\nu_j(y)d\sigma_y$$

$$\overset{|\hat{x}-y|\geqslant R}{\leqslant} \delta|r(x)|\frac{n\omega_n(2R)^{n-1}}{\omega_n R^n} \leqslant n2^{n-1}(\frac{\delta}{R})|r(x)| \overset{\delta\leqslant 2R}{\leqslant} n2^{n-\alpha}(\frac{\delta}{R})^\alpha|r(x)|.$$

Zusammenfassen gilt

$$R^\alpha\frac{|\partial_{x_ix_j}N_r^{B_2}(\tilde{x})-\partial_{x_ix_j}N_r^{B_2}(x)|}{|x-\tilde{x}|^\alpha} \leqslant C(n,\alpha)(|r|_{0;B_2}+R^\alpha[r]_{\alpha;B_2}).$$

Die Abschätzung (2.33) folgt. □

2.1.3 Hölder-Abschätzung für die Lösung der Poisson-Gleichung

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Lösung

$$u(x) = N_r^\Omega(x) + v(x) \text{ mit auf } \Omega \text{ definierter harmonischer Funktion } v$$

von der Poisson Gleichung

$$-\Delta u = r \text{ in } \Omega \text{ mit } r \in C^\alpha(\Omega), \quad \alpha \in (0,1).$$

Innere Hölder-Abschätzung von der Lösung der Poisson-Gleichung
Wir vorstellen zunächst die folgende Schauder-Normen, die der Abstand zur

Grenze des Gebiets $\partial\Omega$ berücksichtigt [10]:

$$
\begin{aligned}
|u|^*_{k;\Omega} &= |u|^*_{k,0;\Omega} = \sum_{m=0}^{k} [u]^*_{m;\Omega} := \sum_{m=0}^{k} \Big(\sup_{x\in\Omega} d_x^m \sup_{|s|=m} |D^s u(x)| \Big) \text{ mit } d_x := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega),\\
|u|^*_{k,\alpha;\Omega} &= |u|^*_{k;\Omega} + [u]^*_{k,\alpha;\Omega} := |u|^*_{k;\Omega} + \sup_{x,y\in\Omega} d_{x,y}^{k+\alpha} \sup_{|s|=k} \frac{|D^s u(x) - D^s u(y)|}{|x-y|^\alpha} \text{ mit } d_{x,y} := \min(d_x, d_y),\\
|r|^{(l)}_{k;\Omega} &= |r|^{(l)}_{k,0;\Omega} = \sum_{m=0}^{k} \Big(\sup_{x\in\Omega} d_x^{m+l} \sup_{|s|=m} |D^s r(x)| \Big),\\
|r|^{(l)}_{k,\alpha;\Omega} &= |r|^{(l)}_{k;\Omega} + [r]^{(l)}_{k,\alpha;\Omega} := |r|^{(l)}_{k;\Omega} + \sup_{x,y\in\Omega} d_{x,y}^{k+l+\alpha} \sup_{|s|=k} \frac{|D^s r(x) - D^s r(y)|}{|x-y|^\alpha}.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Wir stimmen die folgenden zu

$$|u|^*_{0;\Omega} = [u]^*_{0;\Omega} = |u|^{(0)}_{0;\Omega} = |u|_{0;\Omega}.$$

Satz 2.1 (Innere Hölder-Abschätzung)**.** *Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = r$ in einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $r \in C^\alpha(\Omega)$. Dann gilt*

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(n,\alpha)(|u|_{0;\Omega} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}). \tag{2.35}$$

[19.05.2021]

[01.06.2021]

Beweis. O.B.d.A. nehmen wir $|u|_{0;\Omega} < \infty$ und $|r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega} < \infty$ an. Sei $x \in \Omega$ und

$$R = \frac{1}{6} d_x, \quad B_1 = B_R(x), \quad B_2 = B_{2R}(x).$$

Sei $N_r^{B_2}$ das Newton-Potential von r in B_2. Dann ist die Funktion $v = u - N_r^{B_2}$ harmonisch in B_2.

[10] Entsprechend können wir die Teilräume von $C^k(\Omega)$ bzw. $C^{k,\alpha}(\Omega)$ definieren:

$$
\begin{aligned}
C^{k,*}(\Omega) &= \{u \in C^k(\Omega) \,|\, |u|^*_{k;\Omega} < \infty\},\\
C^{k,\alpha,*}(\Omega) &= \{u \in C^{k,\alpha}(\Omega) \,|\, |u|^*_{k,\alpha;\Omega} < \infty\},\\
C^{k,(l)}(\Omega) &= \{u \in C^k(\Omega) \,|\, |u|^{(l)}_{k;\Omega} < \infty\},\\
C^{k,\alpha,(l)}(\Omega) &= \{u \in C^{k,\alpha}(\Omega) \,|\, |u|^{(l)}_{k,\alpha;\Omega} < \infty\}.
\end{aligned}
$$

Mit $\nabla N_r^{B_2}(x') = \int_{B_2} \nabla\Gamma(x'-y)r(y)\,\mathrm{d}y$ für $x' \in B_1$ folgt

$$|\nabla N_r^{B_2}(x')| \leqslant |r|_{0;B_2} \int_{B_{3R}(x')} \frac{1}{\omega_n}|x'-y|^{1-n}\,\mathrm{d}y \ = 3R|r|_{0;B_2} \text{ für alle } x' \in B_1.$$

Zusammen mit Lemma 2.1 und $\operatorname{dist}(B_2, \partial\Omega) \geqslant 4R$ folgt

$$\begin{aligned} &R|DN_r^{B_2}|_{0;B_1} + R^2|D^2N_r^{B_2}|_{0;B_1} + R^{2+\alpha}[D^2N_r^{B_2}]_{\alpha;B_1} \\ &\leqslant C(n,\alpha)(R^2|r|_{0;B_2} + R^{2+\alpha}[r]_{\alpha;B_2}) \leqslant C(n,\alpha)|r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}. \end{aligned}$$

Mit Cauchy-Abschätzung (2.15) (mit $\Omega = B_2$, $\Omega_0 = B_1$ und $\operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega) = R$) für die harmonische Funktion v folgt (Übung, siehe auch (2.47))

$$R|Dv|_{0;B_1} + R^2|D^2v|_{0;B_1} + R^{2+\alpha}[D^2v]_{\alpha;B_1} \leqslant C(n,\alpha)|v|_{0;B_2}.$$

Da $N_r^{B_2}(x') = \int_{B_2} \Gamma(x'-y)r(y)\,\mathrm{d}y$ für $x' \in B_2$, haben wir für $n \geqslant 3$

$$|N_r^{B_2}|_{0;B_2} \leqslant \frac{|r|_{0;B_2}}{(n-2)\omega_n} \int_{B_{4R}(x')} |x'-y|^{2-n}\,\mathrm{d}y \ = \frac{2R^2}{n-2}|r|_{0;B_2},$$

und deshalb gilt

$$\begin{aligned} &R|Dv|_{0;B_1} + R^2|D^2v|_{0;B_1} + R^{2+\alpha}[D^2v]_{\alpha;B_1} \\ &\leqslant C(n,\alpha)(|u|_{0;B_2} + |N_r^{B_2}|_{0;B_2}) \leqslant C(n,\alpha)(|u|_{0;B_2} + CR^2|r|_{0;B_2}). \end{aligned}$$

Wir haben die obene Ungleichung auch für $n = 2$, da wir die Funktion $u(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)$ betrachten können.
Dann gilt

$$\begin{aligned} d_x|Du(x)| + d_x^2|D^2u(x)| &\leqslant (6R)(|DN_r^{B_2}|_{0;B_1} + |Dv|_{0;B_1}) + (6R)^2(|D^2N_r^{B_2}|_{0;B_1} + |D^2v|_{0;B_1}) \\ &\leqslant C(n,\alpha)(|u|_{0;B_2} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}). \end{aligned}$$

Sei $y \in \Omega$ mit $d_x \leqslant d_y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{x,y}^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leqslant (6R)^{2+\alpha}[D^2u]_{\alpha;B_1} + 6^\alpha(6R)^2(|D^2u(x)| + |D^2u(y)|) \\ &\leqslant C(n,\alpha)(|u|_{0;\Omega} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}). \end{aligned}$$

Die innere Hölder-Abschätzung (2.35) folgt. $\square$

Lokale Grenze-Abschätzung von der Lösung der Poisson-Gleichung
Sei

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \\ \text{mit } &\partial\,\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Sei $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ und

$$B_1 = B_R(x_0), \quad B_2 = B_{2R}(x_0), \quad B_1^+ = B_1 \cap \mathbb{R}^n_+, \quad B_2^+ = B_2 \cap \mathbb{R}^n_+ .$$

Dann haben wir eine ähnliche Abschätzung vom Newton-Potential in den abgeschnittenen Kugeln wie in Lemma 2.1.

Lemma 2.2. *Falls $r \in C^\alpha(\overline{B}_2^+)$, $\alpha \in (0,1)$, gilt dann das Newton-Potential*

$$N_r^{B_2^+}(x) = \int_{B_2^+} \Gamma(x-y) r(y)\,\mathrm{d}y \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1^+)$$

und

$$|D^2 N_r^{B_2^+}|_{0;B_1^+} + R^\alpha [D^2 N_r^{B_2^+}]_{\alpha;B_1^+} \leqslant C(|r|_{0;B_2^+} + R^\alpha [r]_{\alpha;B_2^+}), \tag{2.36}$$

wobei $C = C(n,\alpha)$ eine positive Konstante ist.

Beweis. Wir nehmen an, dass die Kugel B_2 die Hyperebene $\partial\,\mathbb{R}^n_+$ schneidet (sonst ist das Resultat in Lemma 2.1 enthalten). Mit (2.22) folgt für $x \in B_1^+$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} N_r^{B_2^+}(x) = \int_{B_2^+} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Gamma(x-y)(r(y)-r(x))\,\mathrm{d}y - r(x) \oint_{\partial B_2^+} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) \nu_j(y) d\sigma_y.$$

wobei $\partial B_2^+ = (\partial B_2 \cap \mathbb{R}^n_+) \cup (B_2^+ \cap \partial\,\mathbb{R}^n_+)$. Falls $j \neq n$, gilt dann $\nu_j|_{B_2^+ \cap T} = 0$, und

$$\oint_{\partial B_2^+} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) \nu_j(y) d\sigma_y = \int_{\partial B_2 \cap \mathbb{R}^n_+} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) \nu_j(y) d\sigma_y. \tag{2.37}$$

Da

$$\oint_{\partial B_2^+} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x-y) \nu_j(y) d\sigma_y = \oint_{\partial B_2^+} \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(x-y) \nu_i(y) d\sigma_y,$$

gilt (2.37) auch für $i \neq n$. Deshalb folgt die Abschätzung (2.36) für $i \neq n$ oder $j \neq n$ genau wie im Beweis von Lemma 2.1 (mit B_2 bzw. $B_\delta(\xi)$ bzw. ∂B_2 ersetzt durch B_2^+ bzw. $B_\delta(\xi) \cap \mathbb{R}^n_+$ bzw. $\partial B_2 \cap \mathbb{R}^n_+$). Zum Schluss folgt die Abschätzung (2.36) für $\partial^2_{x_n x_n} N_r^{B_2^+} = \Delta N_r^{B_2^+} - \sum_{j=1}^{n-1} \partial^2_{x_j x_j} N_r^{B_2^+}$. $\square$

Sei Ω eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n_+$ mit offener Grenzabschnitt $T = \partial\Omega \cap \partial\,\mathbb{R}^n_+$. Analog wie in (2.34) vorstellen wir die folgenden Normen, die der Abstand zur Grenze $\partial\Omega$ aber ohne der Grenzabschnitt T berücksichtigt:

$$
\begin{aligned}
|u|^*_{k;\Omega\cup T} &= |u|^*_{k,0;\Omega\cup T} = \sum_{m=0}^{k}\Big(\sup_{x\in\Omega,|s|=m} \bar{d}_x^m |D^s u(x)|\Big) \text{ mit } \bar{d}_x := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega\backslash T),\\
|u|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T} &= |u|^*_{k;\Omega\cup T} + [u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T} := |u|^*_{k;\Omega\cup T} + \sup_{x,y\in\Omega,x\neq y,|s|=k} \bar{d}_{x,y}^{k+\alpha}\frac{|D^s u(x) - D^s u(y)|}{|x-y|^\alpha},\\
|r|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T} &= \sup_{x\in\Omega\cup T} \bar{d}_x^k|r(x)| + \sup_{x,y\in\Omega} \bar{d}_{x,y}^{k+\alpha}\frac{|r(x)-r(y)|}{|x-y|^\alpha}.
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

mit $\bar{d}_{x,y} := \min(\bar{d}_x, \bar{d}_y)$. Dann haben wir die ähnliche Abschätzung wie in Satz 2.1 (wir betrachten T als "inneres Gebiet").

Satz 2.2 (Lokale Grenze-Abschätzung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ eine offene Teilmenge mit einer Grenzabschnitt $T \subset \partial\,\mathbb{R}^n_+$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup T)$ mit $u|_T = 0$ eine Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = r$ in Ω mit $r \in C^\alpha(\Omega \cup T)$. Dann gilt*

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant C(n,\alpha)(|u|_{0;\Omega} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}). \tag{2.39}$$

Beweis. Sei $x \in \Omega$ und $R = \frac{1}{6}\bar{d}_x$ mit (o.B.d.A.) $B_2^+ \cap \partial\,\mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing$. Sei $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ und $x^* = (x', -x_n)$. Wir definieren

$$r^*(x) = r^*(x', x_n) = \begin{cases} r(x', x_n) & \text{falls } x_n \geqslant 0,\\ r(x', -x_n) & \text{sonst.}\end{cases} \tag{2.40}$$

Setzen

$$B_2^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^* \in B_2^+\} \text{ und } D = B_2^+ \cup B_2^- \cup (B_2 \cap T).$$

Dann gilt

$$r^* \in C^\alpha(\overline{D}) \text{ mit } |r^*|_{0;D} = |r|_{0;B_2^+} \text{ und } [r^*]_{\alpha;D} \leqslant [r]_{\alpha;B_2^+}.$$

Setzen

$$w(x) = \int_{B_2^+}\Big(\Gamma(x-y) - \Gamma(x^*-y)\Big)r(y)\,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B_2^+} \Big(\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*)\Big) r(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{B_2^+} \Gamma(x-y) r(y)\,\mathrm{d}y \;-\; \int_{B_2^-} \Gamma(x-y) r^*(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_{B_2^+} \Gamma(x-y) r(y)\,\mathrm{d}y \;-\; \int_{D} \Gamma(x-y) r^*(y)\,\mathrm{d}y \\
&=: 2N_r^{B_2^+}(x) - N_{r*}^D(x),
\end{aligned}
$$

wobei $N_r^{B_2^+}$ bzw. N_{r*}^D das Newton-Potential in B_2^+ (in Lemma 2.2) bzw. D definiert sind. Mit Lemma 2.2 und Lemma 2.1 (mit $B_1^+ \subset B_2 \subset D$) gelten

$$
\begin{aligned}
&w(x',0) = 0 \text{ und } -\Delta w = r \text{ in } B_2^+, \\
&|D^2 w|_{0;B_1^+} + R^\alpha [D^2 w]_{\alpha;B_1^+} \leqslant C(n,\alpha)(|r|_{0;B_2^+} + R^\alpha [r]_{\alpha;B_2^+}).
\end{aligned}
$$

Analog wie im Beweis von Satz 2.1 folgt

$$
|w|_{0;B_1^+} + R|Dw|_{0;B_1^+} \leqslant CR^2 |r|_{0;B_2^+}.
$$

Da $v := u - w$ harmonisch in B_2^+ und $v|_T = 0$ ist, kann v durch Reflexion auf eine harmonische Funktion in B_2 erweitert sein (Übung). Mit der Cauch-Abschätzung (2.15) für v in B_2 folgt

$$
\begin{aligned}
&|u|_{0;B_1^+} + R|Du|_{0;B_1^+} + R^2|D^2 u|_{0;B_1^+} + R^{2+\alpha}[D^2 u]_{\alpha;B_1^+} \\
&\leqslant C(|u|_{0;B_1^+} + R^2|r|_{0;B_2^+} + R^{2+\alpha}[r]_{\alpha;B_2^+}).
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Abschätzung (2.39). □

2.1.4 Schauder-Abschätzungen für die Lösungen der elliptischen PDGn

Wir haben die folgende Schauder-Abschätzungen für die Lösungen der elliptischen PDGn mit konstanten Koeffizienten, die einfach aus die Hölder-Abschätzungen für die Lösungen der Poisson-Gleichung mit Hilfe von Koordinatentransformationen folgen.

Lemma 2.3. *Sei*

$$
L_0[u] = r \;\textit{mit}\; L_0[u] := -\sum_{i,j=1}^n A^{ij} D_{ij} u, \tag{2.41}
$$

wobei $A = (A^{ij})$ eine symmetrische konstante Matrix ist, die erfüllt

$$
\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n A^{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n)
$$

mit zwei positiven Konstanten λ, Λ.

(1) Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung von $L_0[u] = r$ mit $r \in C^\alpha(\Omega)$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)(|u|_{0;\Omega} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

(2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ eine offene Teilmenge mit $T = \partial\Omega \cap \partial\,\mathbb{R}^n_+$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup T)$ mit $u|_T = 0$ eine Lösung von $L_0[u] = r$ mit $r \in C^\alpha(\Omega \cup T)$. Dann gilt

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)(|u|_{0;\Omega} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}).$$

Beweis. Wir möchten den Differentialoperator $L_0[u]$ in $-\Delta u$ transformieren (Übung). *Idee:* Sei $h = h(y) : \tilde{\Omega} \to \Omega$ eine C^2-Koordinatentransformation mit $g(x) := h^{-1}(x) \in C^2(\Omega; \tilde{\Omega})$. Dann gilt

$$A : D^2_x u = \sum_{i,j=1}^n A^{ij}\partial^2_{x_i x_j} u(x) = \tilde{A} : D^2_y \tilde{u} + (A : D^2_x g)\cdot\nabla_y \tilde{u} \text{ mit } \tilde{u}(y) := (u \circ h)(y) = u(x),$$

wobei $\tilde{A} = J_g A (J_g)^T$ und $J_g = (\frac{\partial g^i}{\partial x_j})_{i,j=1,\cdots,n}$ die Jacobi-Matrix von g bezeichnet. Wir wählen $g(x) = Px$ aus, wobei P eine konstante Matrix mit

$$\tilde{A} = \mathrm{Id}\,, \quad D^2_x g = 0, \quad g : \mathbb{R}^n_+ \mapsto \mathbb{R}^n_+, \quad \Lambda^{-\frac{1}{2}}|x| \leqslant |g(x)| \leqslant \lambda^{-\frac{1}{2}}|x|.$$

Damit folgt für $k = 0, 1, \cdots$, und $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} c^{-1}|u|^*_{k,\alpha;\Omega} &\leqslant |\tilde{u}|^*_{k,\alpha;\tilde{\Omega}} \leqslant c|u|^*_{k,\alpha;\Omega}, \\ c^{-1}|u|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega} &\leqslant |\tilde{u}|^{(k)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}} \leqslant c|u|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega}, \end{aligned}$$

wobei $c = c(k,\alpha,\lambda,\Lambda)$ eine positive Konstante bezeichnet. Falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ eine offene Teilmenge mit $T = \partial\Omega \cap \partial\,\mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$ ist, können wir weiter annehmen: $g : \Omega \cup T \mapsto \tilde{\Omega} \cup \tilde{T}$ mit $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n_+$, $\tilde{T} = \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\,\mathbb{R}^n_+$ und

$$\begin{aligned} c^{-1}|u|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T} &\leqslant |\tilde{u}|^*_{k,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} \leqslant c|u|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T}, \\ c^{-1}|u|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T} &\leqslant |\tilde{u}|^{(k)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} \leqslant c|u|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}. \end{aligned}$$

Das Lemma folgt dann nach Satz 2.1 und Satz 2.2. □

Mit den Störungsargumenten kann man die innere Schauder-Abschätzungen für die allgemeineren elliptischen PDGn beweisen. Um die globale Schauder-Abschätzungen im ganzen Gebiet zu beweisen, brauchen wir die Regularitäten nicht nur für die Lösungen in der Nähe der Grenze sondern auch für die Grenze des Gebiets - wir definieren $C^{2,\alpha}$-Gebiet wie folgt.

Definition 2.1. *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie seine Grenze heißt $C^{k,\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$, falls gibt es zum jeden Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine Kugel $B = B(x_0)$ und eine bijektive Zuordnung $g : B \mapsto D \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$g(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+, \quad g(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\,\mathbb{R}^n_+, \quad g \in C^{k,\alpha}(B), \quad g^{-1} \in C^{k,\alpha}(D).$$

Satz 2.3 (Schauder-Abschätzungen)**.** *Wir haben die folgende innere- und globale Schauder-Abschätzungen.*

(i) Sei Ω eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ und $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ eine beschränkte Lösung von der elliptischen Gleichung zweiter Ordnung

$$L[u] = r \text{ mit } L[u] := -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} D_{ij}u + \sum_{j=1}^n b^j D_j u + cu, \tag{2.42}$$

wobei $r \in C^\alpha(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \\ &\sup_{i,j=1,\cdots,n} |a^{ij}|^{(0)}_{0,\alpha;\Omega} + \sup_{j=1,\cdots,n} |b^j|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega} + |c|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega} \leqslant \Lambda \end{aligned} \tag{2.43}$$

gelten für zwei positiven Konstanten λ, Λ.

Dann gilt die folgende innere Schauder-Abschätzung

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)(|u|_{0;\Omega} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}). \tag{2.44}$$

(ii) Sei Ω ein $C^{2,\alpha}$-Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine Lösung von der obigen Gleichung (2.42)*, wobei $r \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und L bezeichnet einen streng elliptischen Operator in Ω mit $C^\alpha(\overline{\Omega})$-Koeffizienten, d.h.*

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \\ &\sup_{i,j=1,\cdots,n} |a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega} + \sup_{j=1,\cdots,n} |b^j|_{0,\alpha;\Omega} + |c|_{0,\alpha;\Omega} \leqslant \Lambda \end{aligned} \tag{2.45}$$

gelten für zwei positiven Konstanten λ, Λ. Sei $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ mit $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.Dann gilt die folgende globale Schauder-Abschätzung

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(n,\alpha,\lambda,\Lambda,\Omega)(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega} + |r|_{0,\alpha;\Omega}). \tag{2.46}$$

[02.06.2021]

[08.06.2021]

Idee der Beweise. Wir können (2.44) in den folgenden Schritten beweisen.

- Es ist genug, die Abschätzung für $[u]^*_{2,\alpha;\Omega}$ in (2.44) zu prüfen - Wir haben die folgende Interpolationsungleichungen für die Funktion $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ (Übung): Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C = C(\varepsilon)$ s.d.

$$[u]^*_{j,\beta;\Omega} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \varepsilon[u]^*_{2,\alpha;\Omega}, \quad j = 0,1,2, \quad \alpha,\beta \in [0,1], \quad j+\beta < 2+\alpha. \tag{2.47}$$

- Es ist genug, die Abschätzung für $[u]^*_{2,\alpha;K}$ mit kompakter Teilmenge $K \Subset \Omega$ zu prüfen - Es gibt eine Ausschöpfung (siehe (2.24)) für Ω.

- Sei $x_0, y_0 \in \Omega$ mit $d_{x_0} = d_{x_0,y_0} = \min\{d_{x_0}, d_{y_0}\}$, wobei Ω eine beschränkte offene Teilmenge ist.

  Sei $d = \mu d_{x_0}$ und $B = B_d(x_0)$ mit der später zu bestimmenden positiven Konstante $\mu \leqslant \frac{1}{2}$. Wir schreiben die elliptische PDG (2.42) wie folgt:

$$-\sum_{i,j=1}^n A^{ij} D_{ij} u = \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x) - a^{ij}(x_0)) D_{ij} u - \sum_{j=1}^n b^j D_j u - cu + r := R(x)$$
$$\text{mit } A^{ij} = a^{ij}(x_0). \tag{2.48}$$

  Mit Lemma 2.3 haben wir

$$(\frac{d}{2})^{2+\alpha} \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leqslant C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)(|u|_{0;B} + |R|^{(2)}_{0,\alpha;B}), \quad y_0 \in B_{d/2}(x_0).$$

  Für $y_0 \notin B_{d/2}(x_0)$ gilt

$$d_{x_0}^{2+\alpha} \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leqslant (\frac{2}{\mu})^\alpha \Big(d_{x_0}^2 |D^2u(x_0)| + d_{y_0}^2 |D^2u(y_0)| \Big) \leqslant \frac{4}{\mu^\alpha} [u]^*_{2;\Omega}.$$

  Zusammenfassen bekommen wir

$$d_{x_0}^{2+\alpha} \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leqslant \frac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0;B} + |R|^{(2)}_{0,\alpha;B}) + \frac{4}{\mu^\alpha}[u]^*_{2;\Omega}.$$

  Mit der Interpolationsungleichung (2.47) ist es genug, den Term $\frac{1}{\mu^{2+\alpha}}|R|^{(2)}_{0,\alpha;B}$ zu begrenzen (wir wählen zunächst kleines μ und dann kleines ε aus).

- Wir zeigen (Übung)

$$|R|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant C\mu^{2+2\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega} + C(\mu)(|u|_{0;\Omega} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}). \tag{2.49}$$

Mit Hilfe von (2.47),

$$|f|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant d^2|f|_{0;B} + d^{2+\alpha}[f]_{\alpha;B} \leqslant \frac{\mu^2}{(1-\mu)^2}[f]^{(2)}_{0;\Omega} + \frac{\mu^{2+\alpha}}{(1-\mu)^{2+\alpha}}[f]^{(2)}_{0,\alpha;\Omega} \leqslant 8\mu^2|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega},$$

und $|fg|^{(k+l)}_{0,\alpha;\Omega} \leqslant |f|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega}|g|^{(l)}_{0,\alpha;\Omega}, \quad k+l \geqslant 0$

kann man (2.49) under der Annahme (2.43) überprüfen. Zum Schluss folgt (2.44) mit $C\mu^\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

[08.06.2021]

[09.06.2021]

Wir können die globale Schauder-Abschätzung (2.46) in den folgenden Schritten beweisen (Übungen).

- Es ist genug, die Abschätzung (2.46) für die $C^{2,\alpha}$-Lösung mit $u|_{\partial\Omega} = 0$ zu überprüfen:

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(n,\alpha,\lambda,\Lambda,\Omega)(|u|_{0;\Omega} + |r|_{0,\alpha;\Omega}). \tag{2.50}$$

- Falls $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n_+$ mit $\tilde{T} \subset \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\,\mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing$ ist, gilt es für jede beschränkte Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\tilde{\Omega} \cup \tilde{T})$ mit $u|_{\tilde{T}} = 0$ von der elliptischen PDG (2.42) mit $|r|^{(2)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} < \infty$ und

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \tilde{\Omega},\, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ &\sup_{i,j=1,\cdots,n} |a^{ij}|^{(0)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} + \sup_{j=1,\cdots,n} |b^j|^{(1)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} + |c|^{(2)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} \leqslant \Lambda \end{aligned} \tag{2.51}$$

die folgende lokale Grenze-Abschätzung

$$|u|^*_{2,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} \leqslant C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)(|u|_{0;\tilde{\Omega}} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}}).$$

- Sei Ω ein $C^{2,\alpha}$-Gebiet. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und $g : B' := B_\rho(x_0)\cap\Omega \mapsto D' \subset \mathbb{R}^n_+$ ein $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus mit $T' = g(B_\rho(x_0)\cap\partial\Omega) \subset \partial D' \cap \partial\,\mathbb{R}^n_+$. Falls u die elliptische PDG (2.42)-(2.45) in B' und $u|_{\partial\Omega} = 0$ erfüllt, erfüllt $\tilde{u}(y) := (u \circ g^{-1})(y) = u(x)$ die folgende elliptische PDG in D':

$$\tilde{L}[\tilde{u}](y) = -\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}^{ij}(y)D_{y_iy_j}\tilde{u}(y) + \sum_{j=1}^n \tilde{b}^j(y)D_{y_j}\tilde{u}(y) + \tilde{c}(y)\tilde{u}(y) = \tilde{r}(y),$$

wobei $(\tilde{a}^{ij}) = J_g(a^{ij})(J_g)^T, \quad (\tilde{b}^j) = (b^j) - (a^{kl}) : (D^2_{x_kx_l}g^j), \quad \tilde{c}(y) = c(x),\, \tilde{r}(y) = r(x),$

mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}^{ij}(y)\xi_i\xi_j \geqslant \frac{\lambda}{G}|\xi|^2, \quad \forall y \in D',\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\sup_{i,j=1,\cdots,n} |\tilde{a}^{ij}|_{0,\alpha;D'} + \sup_{j=1,\cdots,n} |\tilde{b}^j|_{0,\alpha;D'} + |\tilde{c}|_{0,\alpha;D'} \leqslant \Lambda G$$

wobei G eine positive von g (und damit von Ω) abhängige Konstante bezeichnet. Damit gilt für $\tilde{u}|_{T'} = 0$

$$|\tilde{u}|^*_{2,\alpha;D'\cup T'} \leqslant C(n,\alpha,\lambda,\Lambda,G)(|\tilde{u}|_{0;D'} + |\tilde{r}|^{(2)}_{0,\alpha;D'\cup T'}),$$

und deshalb

$$|u|^*_{2,\alpha;B'\cup T} \leqslant C(n,\alpha,\lambda,\Lambda,G)(|u|_{0;B'} + |r|^{(2)}_{0,\alpha;B'\cup T}) \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |r|_{0,\alpha;\Omega}).$$

Setzen $B'' = B_{\rho/2}(x_0) \cap \Omega$. Dann gilt

$$|u|_{2,\alpha;B''} \leqslant C\max\{1, (\frac{2}{\rho})^{2+\alpha}\}(|u|_{0;\Omega} + |r|_{0,\alpha;\Omega})$$

Mit der Überdeckungseigenschaft von $\bar{\Omega}$ und der inneren Schauder-Abschätzung (2.44) erhalten wir (2.50).

□

2.1.5 Das Dirichlet-Problem und der Alternativensatz

Wir können das Maximum- und Minimumprinzip (2.18) für die harmonische Funktionen auf die Lösungen der elliptischen PDGn mit $c \geqslant 0$ verallgemeinern.

Lemma 2.4 (Maximum- und Minimumprinzip)**.** *Sei* $L = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}D_{ij} + \sum_{j=1}^n b^j D_j + c$ *ein elliptischer Operator mit*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega,\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\max{}_{j=1,\cdots,n}|b^j|_{0;\Omega} \leqslant b_0\lambda,$$

$$c(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

in einem beschränkten Gebiet Ω*, wobei* $\lambda > 0$*,* $b_0 > 0$ *zwei positiven Konstanten bezeichnen. Für* $u \in C(\overline{\Omega})$ *mit*

$$L[u] \leqslant 0 \textit{ bzw. } L[u] \geqslant 0$$

gilt
$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ \ \ bzw.\ \ \inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u^-,$$
wobei $u^+ := \max\{0, u\}$ *bzw.* $u^- := \min\{0, u\}$ *bezeichnet.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $c = 0$. Falls $L[v] = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} D_{ij} v + \sum_{j=1}^n b^j D_j v < 0$, kann $v \in C(\overline{\Omega})$ dann nicht das Maximum in Ω erreichen. Wir rechnen mit $a^{11} \geqslant \lambda$ und $|b^1| \leqslant b_0 \lambda$
$$L[e^{\beta x_1}] = (-\beta^2 a^{11} + \beta b^1) e^{\beta x_1} \leqslant \lambda(-\beta^2 + \beta b_0) e^{\beta x_1} \leqslant -\lambda \text{ für } \beta \geqslant b_0 + 1.$$
Falls $L[u] \leqslant 0$, erfüllt die Funktion $u + \varepsilon e^{\beta x_1} \in C(\overline{\Omega})$ für jedes $\varepsilon > 0$ dann
$$L[u + \varepsilon e^{\beta x_1}] < 0.$$
Damit gilt
$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon e^{\beta x_1}) \leqslant \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon e^{\beta x_1}) \quad \forall \varepsilon > 0,$$
die das Fakt $\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u$ liefert. Analog folgt $\inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u$ für $L[u] \geqslant 0$.
Falls $c \geqslant 0$, betrachten wir die offene Teilmenge $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ mit
$$u = u^+ \text{ auf } \Omega^+ \text{ und } u \leqslant 0 \text{ auf } \Omega \backslash \Omega^+.$$
Falls $L[u] \leqslant 0$, gilt dann
$$\bar{L}[u] := -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} D_{ij} u + \sum_{j=1}^n b^j D_j u = L[u] - cu \leqslant 0 \text{ auf } \Omega^+.$$
Damit gilt
$$\sup_{\Omega^+} u \leqslant \sup_{\partial\Omega^+} u \Rightarrow \sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+.$$
Analog folgt $\inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u^-$ für $L[u] \geqslant 0$. □

Die Methode der Stetigkeit hilft, das Dirchlet-Problem einer allgemeineren elliptischen PDG auf die Poisson-Gleichung zu reduzieren.

Lemma 2.5 (Methode der Stetigkeit)**.** *Sei U ein Banachraum und V ein normierter linearer Raum. Sei L_0 und L_1 zwei beschränkte lineare Operatoren von U nach V. Setzen*
$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1, \quad t \in [0,1],$$
und nehmen an, dass es eine Konstante C gibt, s.d.
$$\|u\|_U \leqslant C\|L_t u\|_V, \quad t \in [0,1].$$
Dann
$$\mathrm{Ran}(L_1) = V \Leftrightarrow \mathrm{Ran}(L_0) = V.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass L_s surjektiv für ein $s \in [0,1]$ ist. Mit der Abschätzung $\|u\|_U \leqslant C\|L_t u\|_V$ ist L_s eigentlich bijektiv mit $\|L_s^{-1}\|_{V\mapsto U} \leqslant C$. Wir schreiben die Gleichung $L_t u = r$ wie

$$\begin{aligned} &L_s u = r + (L_s - L_t)u = r + (t-s)(L_0 - L_1)u \\ \Leftrightarrow\ &u = L_s^{-1} r + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)u. \end{aligned}$$

Die Abbildung $u \mapsto L_s^{-1}r + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)u$ ist eine Kontraktionsabbildung für $|s-t| < \delta := \left[C(\|L_0\|_{U\mapsto V} + \|L_1\|_{U\mapsto V})\right]^{-1}$. Damit ist L_t bijektiv für $t \in (s-\delta, s+\delta) \cap [0,1]$. Wir teilen das Intervall $[0,1]$ in Teilintervalle mit einer Länge von weniger als δ. Die Abbildung L_t ist bijektiv für alle $t \in [0,1]$, falls L_t bijektiv für eines $t_0 \in [0,1]$ ist. □

Wir können jetzt das Dirchlet-Problem der elliptischen PDG mit positivem Koeffizient $c \geqslant 0$ lösen - die Schauder-Abschätzungen spielen eine wichtige Rolle.

Satz 2.4 (Lösbarkeit des Dirichlet-Problems). *Sei Ω ein $C^{2,\alpha}$-Gebiet in $\mathbb{R}^n$, das die Kugelbedingung* (2.17) *in jedem Randpunkt erfüllt. Sei $L = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}D_{ij} + \sum_{j=1}^n b^j D_j + c$ ein streng elliptischer Operator 2. Ordnung (d.h.$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und eine positive Konstante $\lambda > 0$) mit $C^\alpha(\overline{\Omega})$-Koeffizienten (d.h. $a^{ij}, b^j, c \in C^\alpha(\overline{\Omega})$) und*

$$c \geqslant 0$$

in Ω. Dann hat das Dirichlet-Problem

$$L[u] = r \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega, \tag{2.52}$$

wobei $r \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ gegeben sind, eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Beweis. Da $L[u-\varphi] = L[u] - L[\varphi]$, ist es genug, das Dirichlet-Problem (2.52) mit Nullrandbedingung zu betrachten.
Setzen

$$L_t[u] = -(1-t)\Delta u + tL[u], \quad t \in [0,1].$$

Sei $\lambda, \Lambda > 0$ zwei positive Konstanten s.d. (2.45) für die Koeffizienten von L gilt. Dann gilt (2.45) mit $\bar\lambda = \min\{1,\lambda\}$ und $\bar\Lambda = \max\{1,\Lambda\}$ für die Koeffizienten von L_t. Der Operator L_t ist beschränkt und linear vom Banachraum

$$U = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

nach dem Banachraum

$$V = C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

Die Lösbarkeit des Dirichlet-Problems

$$L_t[u] = r \text{ in } \Omega \text{ und } u|_{\partial\Omega} = 0$$

ist dann äquivalent zur Invertierbarkeit des Operators L_t.
Sei $u_t \in U$ eine Lösung dieses Dirichlet-Problems. Mit Satz 2.3 gilt

$$|u_t|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(n, \alpha, \bar{\lambda}, \bar{\Lambda}, \Omega)(|u_t|_{0;\Omega} + |r|_{0,\alpha;\Omega}).$$

Wir zeigen jetzt die folgende Abschätzung unter der Annahme $c \geqslant 0$ mit Hilfe von Maximum- und Minimumprinzip in Lemma 2.4 (Übung):

$$|u_t|_{0;\Omega} \leqslant C|r|_{0;\Omega}.$$

(*Idee*: Sei $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in (0, d)\}$. Wir vergleichen u_t mit der Funktion

$$v = \frac{1}{\lambda}(e^{\beta x_1} - e^{\beta d}) \sup_{\Omega} |r| \text{ bzw. } \frac{1}{\lambda}(e^{\beta d} - e^{\beta x_1}) \sup_{\Omega} |r|$$

wobei $\beta \geqslant b_0 + 1$ mit $b_0 := \sup_{j=1,\cdots,n} |b^j|_{0;\Omega}/\lambda \leqslant \Lambda/\lambda$.) Deshalb haben wir die Abschätzung

$$\|u_t\|_U \leqslant C(n, \alpha, \bar{\lambda}, \bar{\Lambda}, \Omega)\|L_t[u]\|_V.$$

Da die Poisson-Gleichung in einem regulären Gebiet lösbar ist, bekommen wir $\operatorname{Ran}(L) = V$ mit Lemma 2.5. □

[09.06.2021]

[15.06.2021]

Bemerkung 2.1. *(a) (Spezialfall) Sei $\Omega = B$ ein Kugel. Sei L ein streng elliptischer Operator 2. Ordnung mit $C^\alpha(\overline{B})$-Koeffizienten und $c \geqslant 0$. Dann hat das Dirichlet-Problem* (2.52) *eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$. Insbesondere liegt die Lösung (sowie das Newton-Potential N_r^B) der Poisson-Gleichung*

$$-\Delta u = r \in C^\alpha(\overline{B}) \text{ und } u|_{\partial B} = \varphi \tag{2.53}$$

mit $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ in $C^{2,\alpha}(\overline{B})$.

(b) (Allgemeinerer Fall) Sei Ω ein beschränktes Gebiet, das die Kugelbedingung (2.17) *in jedem Randpunkt erfüllt. Sei L ein streng elliptischer Operator mit beschränkten $C^\alpha(\Omega)$-Koeffizienten und $c \geqslant 0$ in Ω. Dann hat das Dirichlet-Problem* (2.52) *mit $r \in C^\alpha(\Omega)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (ohne Beweis hier). Insbesondere hat das Dirichlet-Problem $L[u] = r \in C^\alpha(B)$ mit $\varphi \in C(\overline{B})$ eine eindeutige Lösung $u \in C(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$.*

(c) *(Schwache Annahme) Satz 2.4 gilt ohne die Kugelbedingung (es folgt aus Koordinatentransformation).*

(d) *(Andere Randbedingung) Wir können die elliptische PDG 2. Ordnung $L[u] = r$ im $C^{2,\alpha}$-Gebiet Ω mit anderen Randbedingungen, z.B.*

$$\gamma u + \frac{\partial u}{\partial \mu} = \varphi \text{ auf } \partial\Omega \text{ mit } \gamma(\mu \cdot \nu) > 0,$$

lösen - Es gibt eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ unter den Voraussetzungen: $a^{ij}, b^j, c \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $c \geqslant 0$, $r \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$, $\gamma, \mu \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$.

Alternativensatz Im Allgemeinen kann das Dirichlet-Problem (2.52) mit $c < 0$ keine Lösungen haben. Wir haben einen Alternativensatz für dieses Dirichlet-Problem von der elliptischen PDG 2. Ordnung (siehe Satz 1.1 für den ODE-Fall).

Satz 2.5 (Alternativensatz für das klassische Dirichlet-Problem der elliptischen PDGn)**.** *Sei $L = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} D_{ij} + \sum_{j=1}^n b^j D_j + c$ ein streng elliptischer Operator mit $C^\alpha(\overline{\Omega})$-Koeffizienten in einem $C^{2,\alpha}$-Gebiet Ω. Es liegt genau einer der beiden Fälle vor:*

1. *Das homogene Dirichlet-Problem*

$$L[u] = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{2.54}$$

hat nur die triviale Lösung, und das inhomogene Dirichlet-Problem

$$L[u] = r \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega \tag{2.55}$$

hat für alle $r \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und alle $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

2. *Das homogene Dirichlet-Problem* (2.54) *hat nichttriviale Lösungen, die einen endlichen dimensionalen Unterraum von $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ bilden, und das inhomogene Dirichlet-Problem* (2.55) *ist nicht für alle $r \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und alle $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ lösbar; wenn sie lösbar ist, dann nicht eindeutig.*

Beweis. Es ist genug, das inhomogene Dirichlet-Problem nur mit Nullrandbedingung zu betrachten.
Sei $\sigma \geqslant \sup_\Omega(-c)$ und

$$L^\sigma := L + \sigma. \tag{2.56}$$

Mit Satz 2.4 (zwar Bemerkung 2.1 (c)) ist der Operator

$$L^\sigma : U = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \,|\, u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \mapsto V = C^\alpha(\overline{\Omega})$$

invertierbar, und die Inverse $(L^\sigma)^{-1} : V \mapsto U$ ist beschränkt und linear mit

$$|(L^\sigma)^{-1}r|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C|r|_{0,\alpha;\Omega}.$$

Mit Ascoli-Arzela-Satz ist $(L^\sigma)^{-1} : V \mapsto V$ kompakt. Wir schreiben die PDG $L[u] = r$ wie

$$L^\sigma[u] - \sigma u = r \Leftrightarrow (\mathrm{Id} - \sigma(L^\sigma)^{-1})[u] = (L^\sigma)^{-1}r.$$

Satz 2.5 folgt nach dem Fredholm-Alternativensatz für die kompakten Operatoren in einem Banachraum (siehe den Beweis in Funktionalanalyse - Vorlesung):
Sei $T : V \mapsto V$ ein kompakter Operator im normierten linearen Raum V. Es liegt genau einer der beiden Fälle vor:

1. Die homogene Gleichung
$$u - Tu = 0 \tag{2.57}$$
hat nur die triviale Lösung, und die inhomogene Gleichung
$$u - Tu = r \tag{2.58}$$
hat für alle $r \in V$ eine eindeutige Lösung $u \in V$.

2. Die homogene Gleichung (2.57) hat nichttriviale Lösungen, die einen endlichen dimensionalen Unterraum von V bilden, und die inhomogene Gleichung (2.58) ist nicht für alle $r \in V$ lösbar; wenn sie lösbar ist, dann nicht eindeutig.

□

2.2 Schwache Lösungen der PDGn in Divergenzform

Erinnern an die allgemeine elliptische PDG 2.Ordnung

$$-\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial^2_{x_i x_j}u + \sum_{j=1}^n b^j \partial_{x_j}u + cu = r$$

in einem beschränkten Gebiet Ω mit $a^{ij} = a^{ji}$ und $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, und $\lambda > 0$. Sind die a^{ij} differenzierbar, kann die obige PDG umgeschrieben werden in die sogenannte Divergenzform

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}\Big(a^{ij}\partial_{x_j}u\Big) + \sum_{j=1}^n\Big(b^j + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}a^{ij}\Big)\partial_{x_j}u + cu = r.$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise kann die PDG geschrieben werden als

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) + \vec{b}(x)\cdot\nabla u + cu = r.$$

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Randaufgabe (in der klassischen Formulierung)

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) + \vec{b}\cdot\nabla u + cu = r & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} + \gamma u = 0 & \text{auf } \Gamma_1. \end{cases} \tag{2.59}$$

Hier bezeichnet Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, s.d. der Gaußsche Satz anwendbar ist: Sei σ das Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$ und $\vec{\nu} : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ das Einheitsnormalenvektor. Der Gaußsche Satz gilt in der Form

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Hier bezeichnet $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ einen abgeschlossenen Grenzabschnitt und $\Gamma_1 = \partial\Omega\backslash\Gamma_0$. Die Funktion $\gamma : \Gamma_1 \mapsto \mathbb{R}$ ist gegeben und $\vec{\mu}(x) = A(x)\vec{\nu}(x)$ auf Γ_1.

[15.06.2021]

[16.06.2021]

Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine (klassische) Lösung von (2.59) mit $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b^j, c \in C(\overline{\Omega})$, $\gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$ und $r \in C(\overline{\Omega})$. Ist $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (eine sogenanannte Testfunktion) mit $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$, so gilt

$$\int_\Omega -\mathrm{div}\,(A\nabla u)\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega cu\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega r\varphi\,\mathrm{d}x\,,$$

wobei

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\mathrm{div}\,(A\nabla u)\varphi\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega (\nabla u)\cdot(A\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} A\nabla u\cdot\vec{\nu}\varphi\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\Omega (\nabla u)\cdot(A\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_0}\frac{\partial u}{\partial\mu}\varphi\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\mu}\varphi\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\Omega (\nabla u)^T A\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1}\gamma u\varphi\,\mathrm{d}\sigma\,.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}B[u,\varphi] &:= \int_\Omega \Big((\nabla u)^T A\nabla\varphi + \vec{b}\cdot\nabla u\varphi + cu\varphi\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1}\gamma u\varphi\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\Omega r\varphi\,\mathrm{d}x =: F[\varphi], \quad \forall\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ mit } \varphi|_{\Gamma_0} = 0,\end{aligned} \tag{2.60}$$

wobei B eine Bilinearform und F ein lineares Funktional ist. Umgekehrt gilt auch (Übung):

$$
\begin{aligned}
&u \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ mit } u|_{\Gamma_0} = 0 \text{ erfüllt (2.60) (in der schwachen Formulierung)}\\
&\Rightarrow u \text{ erfüllt (2.59) (in der klassichen Formulierung).}
\end{aligned}
$$

Wir werden die Randaufgabe in der schwachen Formulierung (2.60) betrachten, wobei die erste Ableitungen der Lösung nicht notwendig punktweise sondern nur „unter dem Integral“ Sinn machen müssen.
Wir suchen dann die schwache Lösungen u von (2.60) in einem „großen“ Raum H (der die klassische Lösungen $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\Gamma_0} = 0$ von (2.60) enthaltet), unter schwachen Annahmen zu den Daten (z.B. a^{ij}, b^j, $c \in L^\infty(\Omega)$):

$$u \in H \text{ erfüllt } B[u, \varphi] = F[\varphi] \quad \forall \varphi \in H.$$

2.2.1 Sobolev-Räume

Wir betrachten das Lebesgue-Maß und die (reellwertige) Lebesgue-meßbaren Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und wir identifizieren die auf Ω definierte Funktionen u, v mit $u(x) = v(x)$ $\forall x \in \Omega \backslash A$ für A Nullmenge.

Lebesgue-Räume Es sei $M(\Omega)$ die Menge aller (reellwertigen) Lebesgue-meßbaren Funktionen auf Ω. Mit der Norm

$$\|u\|_{p;\Omega} = \|u\|_{0,p;\Omega} := \Big(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty) \tag{2.61}$$

ist

$$L^p(\Omega) := \{u \in M(\Omega) \,|\, \|u\|_{p;\Omega} < \infty\} \tag{2.62}$$

ein Banachraum. Mit der Norm

$$\|u\|_{\infty;\Omega} = \|u\|_{0,\infty;\Omega} := \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u| = \inf\{C \in \mathbb{R} \,|\, |u(x)| \leqslant C \text{ für fast alle } x \in \overline{\Omega}\} \tag{2.63}$$

ist

$$L^\infty(\Omega) := \{u \in M(\Omega) \,|\, \|u\|_{\infty;\Omega} < \infty\} \tag{2.64}$$

ein Banachraum, der aus allen beschränkten Funktionen auf Ω besteht. Insbesondere ist der Banachraum $L^2(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt [11]

$$\langle u, v \rangle_{0;\Omega} = \int_\Omega u(x)v(x) \,\mathrm{d}x \tag{2.65}$$

[11] Natürlich ist $\|u\|_{2;\Omega} = \langle u, u\rangle_{0;\Omega}^{1/2}$ die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_{0;\Omega}$ induzierte Norm.

ein Hilbertraum.
Erinnern an die globale Räume $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ bzw. die lokale Räume $C^{k,\alpha}(\Omega)$, die im Unterabschnitt 2.1.2 definiert wurden. Analog definieren wir den lokalen Raum $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$:

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u \in M(\Omega) \,|\, u|_K \in L^p(K) \text{ für alle kompakte Teilmenge } K \Subset \Omega\}. \tag{2.66}$$

Mit der Fréchet-Metrik (mit $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω in (2.24))

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m} \frac{\|u\|_{p;K_m}}{1 + \|u\|_{p;K_m}}$$

ist $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ein vollständiger metrischer Raum. Falls Ω beschränkt ist, gilt es für $1 < p < q < \infty$

$$C(\overline{\Omega}) \subsetneq L^\infty(\Omega) \subsetneq L^q(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega) \subsetneq L^1(\Omega) \subsetneq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subsetneq M(\Omega).$$

Wir wiederholen die folgende Fakten für den Banachraum $L^p(\Omega)$:

- Der Banachraum $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$ ist trennbar (und der Banachraum $C(\overline{\Omega})$ auf einem beschränkten Gebiet Ω ist insbesondere ein dichter Unterraum). Im Gegensatz ist der Banachraum $L^\infty(\Omega)$ nicht trennbar (und der Banachraum $C(\overline{\Omega})$ auf einem beschränkten Gebiet Ω ist nicht dicht darin).

  Für $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$ können wir auch eine Approximationsfolge dafür haben. Wir wählen eine Dirac-Folge $(\rho^h)_{h>0}$ mit

  $$\rho^h = \frac{1}{h^n}\rho(\frac{\cdot}{h}).$$

  Hier ist $\rho \geqslant 0$ eine Testfunktion

  $$\rho(x) = \begin{cases} c\exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{für } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2.67}$$

  mit kompakten Träger $\mathrm{Supp}\,(\rho) \subset B_1(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \,\mathrm{d}x = 1$ (wir wählen entsprechende positive Konstante c aus). Für $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definieren wir die Funktionenfolge $(u_h)_{h>0}$:

  $$u_h(x) = \int_\Omega \rho^h(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y \text{ für } x \in \Omega \text{ mit } h < \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega). \tag{2.68}$$

  Dann ist $u_h \in C^\infty(\Omega')$ für $\Omega' \subset \Omega$ mit $\mathrm{dist}\,(\Omega', \partial\Omega) < h$. Wir haben (Übung)

  $u \in C(\Omega) \Longrightarrow u_h \to u$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $K \Subset \Omega$,
  $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \in [1, \infty) \Longrightarrow u_h \to u$ im Sinne von $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

- Der Banachraum $L^p(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ ist reflexiv, und der Dualraum ist isomorph zu $L^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Im Gegensatz sind $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ keine reflexive Räume: „ $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$, aber $(L^\infty(\Omega))' \subsetneq L^1(\Omega)$“.

- Es gilt die Höldersche Ungleichung: Seien $p, q \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$. Dann gilt $uv \in L^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Damit folgt (Übung)

$$\|u\|_{q;\Omega} \leqslant \|u\|_{p;\Omega}^{\lambda}\|u\|_{r;\Omega}^{1-\lambda} \quad \text{mit } \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}, \quad p \leqslant q \leqslant r,$$

die, zusammen mit Youngsche Ungleichung

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ bzw. } \varepsilon\frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-q/p}\frac{b^q}{q} \quad \forall a, b, p, q, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

liefert die folgende Interpolationsungleichung

$$\|u\|_{q;\Omega} \leqslant \varepsilon\|u\|_{r;\Omega} + \varepsilon^{-\mu}\|u\|_{p;\Omega} \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ mit } \mu = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}, \quad p \leqslant q \leqslant r.$$

Sobolev-Räume

Definition 2.2 (Schwache Ableitungen)**.** *Es sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $s = (s_1, \cdots, s_n)$ ein Multiindex. Die Funktion $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ heißt die s-te schwache Ableitung von u, falls*

$$\int_\Omega u(D^s\varphi)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|s|}\int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.69}$$

Die Funktion u heißt dann s-mal schwach differenzierbar, und die s-te schwache Ableitung von u wird mit $D^s u$ bezeichnet.

Beispiele (Übungen):

- Ist $u \in C^k(\Omega)$, ist u auch s-mal schwach differenzierbar mit $|s| = k$, und die s-te schwache Ableitung $D^s u$ stimmt mit der s-ten klassischen Ableitung überein.

- Die Funktion $u(x) = |x|$ auf $\Omega = (-1,1)$ ist nicht klassisch sondern schwach differentzierbar.

- Die Funktion $u(x) = \mathbf{1}_{(-1,0)}$ auf $\Omega = (-1,1)$ ist nicht schwach differenzierbar.

Definition 2.3 (Sobolev-Räume). *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1,\infty]$. Wir definieren den Sobolev-Raum*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \,|\, D^s u \in L^p(\Omega) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0^n \;\; \textit{mit } |s| \leqslant k\}. \tag{2.70}$$

Mit der Norm

$$\|u\|_{k,p;\Omega} := \Big(\sum_{|s|\leqslant k} \|D^s u\|_{p;\Omega}^p\Big)^{1/p} \text{ für } p \in [1,\infty) \text{ und } \|u\|_{k,\infty;\Omega} := \sum_{|s|\leqslant k} \|D^s u\|_{\infty;\Omega} \tag{2.71}$$

ist der Sobolevraum $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum (Übung). Insbesondere ist der Sobolevraum $W^{k,2}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{k;\Omega} := \sum_{|s|\leqslant k} \langle D^s u, D^s v\rangle_{0;\Omega} \tag{2.72}$$

ein Hilbertraum. Analog kann man die lokale Sobolevräume definieren

$$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \,|\, u|_K \in W^{k,p}(K) \text{ für alle kompakte Teilmenge } K \Subset \Omega\}, \tag{2.73}$$

und $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist ein vollständiger metrischer Raum mit der Fréchet-Metrik $\sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m} \frac{\|u\|_{k;p;K_m}}{1+\|u\|_{k;p;K_m}}$. Öffentlich haben wir für ein beschränktes Gebiet Ω und $p \in [1,\infty)$

$$C^k(\overline{\Omega}) \subsetneq W^{k,\infty}(\Omega) \subsetneq W^{k,p}(\Omega) \subsetneq W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Mit der Faltung mit der Dirac-Folge (siehe (2.68)) kann man auch die Approximationsfolge der Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$ im Sinne von $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ finden. Wir haben (Übung)[12]

$$\begin{aligned} &D^s u_h(x) = (D^s u)_h(x) \text{ für } \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > h, \\ &\text{und } u \in W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ p \in [1,\infty) \Longrightarrow u_h \to u \text{ im Sinne von } W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega). \end{aligned}$$

Aber ist $C^k(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$ auf einem beschränkten Gebiet Ω? Können wir auch den Randwert von einer $W^{k,p}(\Omega)$-Funktion definieren? Es hängt von der Regularität des Rands $\partial\Omega$ ab.

[16.06.2021]

[22.06.2021]

[12] Wir haben sogar einen globalen Approximationssatz ohne der Information von $\partial\Omega$: $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.

Globale Approximation, Erweiterungsabbildung und Spurabbildung

Satz 2.6. *Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann haben wir*

(a) $C^\infty(\overline{\Omega})$ ist ein dichter Unterraum in $W^{k,p}(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$, d.h.

$$W^{k,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{k,p;\Omega}}, \quad p \in [1,\infty). \tag{2.74}$$

(b) Es gibt eine lineare Erweitungsabbildung $E : W^{k,p}(\Omega) \mapsto W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty)$, mit

$Eu = u$ *fast überall auf* Ω,
$\operatorname{Supp}(Eu) \subset \tilde{\Omega}$ *mit einer beschränkten offenen Teilmenge* $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$,
$\|Eu\|_{k,p;\mathbb{R}^n} \leqslant C\|u\|_{k,p;\Omega}$.

(c) Es gibt eine beschränkte lineare Spurabbildung $S : W^{1,p}(\Omega) \mapsto L^p(\partial\Omega)$, $p \in (1,\infty)$. Weiter existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C = C(\varepsilon) > 0$ mit

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{p;\partial\Omega} \leqslant \varepsilon\|\nabla u\|_{p;\Omega} + C\|u\|_{p;\Omega} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \tag{2.75}$$

wobei $u|_{\partial\Omega} := Su$.

Beweisidee. (a) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Sei g Lipschitz stetig mit $U := \Omega \cap B_R(x_0) = \{x \in B_R(x_0) \,|\, x_n > g(x_1, \cdots, x_{n-1})\}$. Nehmen wir die Approximationsfolge

$$u^\varepsilon(x) := \rho_\varepsilon * u(x + c\varepsilon\vec{e}_n), \quad \forall x \in V := \Omega \cap B_{R/2}(x_0), \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),$$

wobei $c = c(\Omega) > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega)$ zwei positiven Konstanten s.d. $B_\varepsilon(x+c\varepsilon\vec{e}_n) \subset U$ für alle $x \in V$ und $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Damit folgt (Übung)

$$u^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V}) \text{ und } u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}(V).$$

Nehmen wir die offene Abdeckung $\cup_{j=1}^N V_j$ mit $V_j = \Omega \cap B_{R_j/2}(x^j)$ von $\partial\Omega$ und eine offene Teilmenge V_0 von Ω mit $\Omega \subset \cup_{j=0}^N V_j$. Sei $\{\zeta_j\}_{j=0}^N$ eine glatte untergeordnet zu $\{V_j\}_{j=0}^N$ Zerlegung der Einheit. Sei $\{v_j\}_{j=0}^N$, $v_j \in C^\infty(\overline{V}_j)$ die Näherungsfunktionen. Dann ist $v := \sum_{j=0}^N \zeta_j v_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$ die Näherungsfunktion von u in $W^{k,p}(\Omega)$.
(b) Wir zeigen die Existenz der Erweitungsabbildung nur unten der starker Annahme: Ω ist ein C^k-Gebiet. Es ist genug, das Gebiet $B^+ := B_R(x_0) \cap \mathbb{R}^n_+$, $x_0 \in \partial\,\mathbb{R}^n_+$ zu betrachten. Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Setzen

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in B^+ \\ \sum\limits_{j=1}^{k+1} a_j u(x_1, \dots x_{n-1}, -jx_n) & \text{für } (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n) \in B^+, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k+1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & (k+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^k & 2^k & 3^k & \dots & (k+1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \dots \\ (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Ist $u \in C^k(\overline{B}^+)$, ist $\bar{u} \in C^k(\overline{B})$: $(\partial_{x_n})^i \bar{u}|_{\partial \mathbb{R}^n_+}$ ist steig für $1 \leqslant i \leqslant k$. Da $C^k(\overline{B}^+)$ bzw. $C^k(\overline{B})$ dicht in $W^{k,p}(B^+)$ bzw. $W^{k,p}(B)$ ist, ist die Erweitungsabbildung $Eu := \bar{u}$ wohldefiniert.
(c) Sei $g : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit $g \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} \geqslant 1$ für σ-fast alle $x \in \partial\Omega$. Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt mit Gaußsche Satz und Youngsche Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u|_{\partial\Omega}\|^p_{0,p;\partial\Omega} &= \int_{\partial\Omega} |u|^p \,\mathrm{d}\sigma^{\,n-1} \leqslant \int_{\partial\Omega} |u|^p g \cdot \vec{\nu} \,\mathrm{d}\sigma^{\,n-1} \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}(|u|^p g)\,\mathrm{d}x \;= \int_\Omega |u|^p \operatorname{div} g + p|u|^{p-2} u \nabla u \cdot g \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant |\operatorname{div} g|_{0;\Omega} \|u\|^p_{0,p;\Omega} + p\|u\|^{p-1}_{0,p;\Omega} \|\nabla u\|_{0,p;\Omega} |g|_{0;\Omega} \\ &\leqslant \varepsilon^p \|\nabla u\|^p_{0,p;\Omega} + (|\operatorname{div} g|_{0;\Omega} + (p-1)\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}} |g|^{\frac{p}{p-1}}_{0;\Omega}) \|u\|^p_{0,p;\Omega}, \end{aligned}$$

die (2.75) liefert. D.h. $S : C^1(\overline{\Omega}) \mapsto L^p(\partial\Omega)$ ist bzgl. $\|\|_{1,p;\Omega}$ beschränkt. Da $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ dicht ist, ist S fortsetzbar zu einem linearen beschränktem Operator $S : W^{1,p}(\overline{\Omega}) \mapsto L^p(\partial\Omega)$. □

Wir haben dann (Übung)

Korollar 2.1. *Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Sei $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ abgeschlossen. Wir definieren für $k \geqslant 1$*

$$W^{k,p}_{(\Gamma_0)}(\Omega) := \overline{\{u \in C^k(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \textit{ in einer Umgebung von } \Gamma_0\}}^{\|\cdot\|_{k,p;\Omega}}. \quad (2.76)$$

Dann gilt

$$W^{k,p}_{(\Gamma_0)}(\Omega) = \{u \in W^{k,p}(\Omega) \mid u|_{\Gamma_0} = (Su)|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Insbesondere bezeichnet

$$W^{k,p}_0(\Omega) = W^{k,p}_{(\partial\Omega)}(\Omega) = \overline{C^\infty_0(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{k,p;\Omega}}.$$

Der Raum $W^{k,p}_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$, und insbesondere ist $W^{k,2}_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ ein Hilbertraum.

[22.06.2021]

[23.06.2021]

Bemerkung 2.2. • *Wir können die Regularität der Grenze für (2.74) abschwächen. Falls Ω die Segmentbedingung erfüllt: Es gibt eine offene Abdeckung $\{U_j\}$ von $\partial\Omega$ und die entsprechende Vektors $\vec{y^j}$ mit $x + t\vec{y^j} \in \Omega$ für alle $x \in \overline{\Omega} \cap U_j$ und $t \in (0,1)$, ist $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.*

- *Wir haben $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\|_{k,p;\mathbb{R}^n}}$.*

- *Wir können den Vektorraum $W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) := \{u|_{\partial\Omega} \mid u \in W^{k,p}(\Omega)\}$, $k \geqslant 1$ für ein Lipschitz-Gebiet Ω mit der Norm*

$$\|f\|_{k-\frac{1}{p},p;\partial\Omega} = \inf\{\|u\|_{k,p;\Omega} \mid u \in W^{k,p}(\Omega),\, u|_{\partial\Omega} = f\}$$

ausstatten, s.d. $W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ ein Banachraum ist (Übung).

Sobolev-Ungleichungen und kompakte Einbettung Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ für ein beschränktes Lipschitz-Gebiet Ω, liegt u (mit einer Representation in der Äquivalenzklass) eigentlich

$$\begin{cases} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \frac{pn}{n-p}], & \text{falls } p \in [1,n) \\ C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}), & \text{falls } p \in (n,\infty). \end{cases} \tag{2.77}$$

Falls u etwas 'Nullrandbedingung' erfüllt, kann die L^p-Norm von u durch die L^p-Norm von Du begrenzt werden (siehe die Poincaré-Ungleichung).

Satz 2.7. *Wir haben die folgenden Ungleichungen*

(a) *Sei $p \in [1,n)$. Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann gilt die folgende Gagliardo-Nirenbert-Sobolev-Ungleichung*

$$\|u\|_{\frac{pn}{n-p};\mathbb{R}^n} \leqslant C(p,n)\|Du\|_{p;\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n), \tag{2.78}$$

sowie

$$\|u\|_{\frac{pn}{n-p};\Omega} \leqslant C(p,n,\Omega)\|u\|_{1,p;\Omega}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{2.79}$$

D.h. die Sobolev-Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gilt $\forall q \in [1, \frac{pn}{n-p}]$, und insbesondere ist die Einbettung kompakte für $q < \frac{pn}{n-p}$ z.B. für $q = p$ (d.h. Rellich-Kondrachov-Kompaktsatz).

(b) *Sei $p \in (n,\infty)$. Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann gilt die folgende Morrey-Ungleichung*

$$|u|_{0,1-\frac{n}{p};\mathbb{R}^n} \leqslant C(p,n)\|u\|_{1,p;\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in C^1(\mathbb{R}^n), \tag{2.80}$$

sowie (mit einer Representation in der Äquivalenzklass)

$$|u|_{0,1-\frac{n}{p};\Omega} \leqslant C(p,n,\Omega)\|u\|_{1,p;\Omega}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{2.81}$$

D.h. die Sobolev-Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$ *gilt, und insbesondere ist die Einbettung* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *kompakte für* $\alpha < 1 - \frac{n}{p}$.

(c) *Sei* $p \in [1, n)$. *Sei* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *auf einem beschränkten Gebiet* Ω. *Dann gilt die folgende Poincaré-Ungleichung*

$$\|u\|_{\frac{pn}{n-p};\Omega} \leqslant C(p,n,\Omega)\|Du\|_{p;\Omega}. \tag{2.82}$$

(d) *Sei* $p \in [1, \infty]$. *Sei* Ω *ein beschränktes stückweise glattes* (C^1) *Lipschitz-Gebiet. Sei* $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ *mit positive* σ*-maß. Dann gilt die folgende Friedrichs-Poincaré-Ungleichung*

$$\|u\|_{p;\Omega} \leqslant C(p,n,\Omega)\|Du\|_{p;\Omega}, \quad \forall u \in W^{1,p}_{(\Gamma_0)}(\Omega). \tag{2.83}$$

Beweis. Die Beweise können in [1] gefunden sein.
Beweis für die kompakte Einbettung in (a) (Übung, Beweisidee: 1. Mit Erweitungsabbildung ist es genug, eine Folge $(u_n) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit Träger in einer beschränkten Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ zu betrachten. 2. Wir betrachten die glatte Approximationsfolge $(u_{n,h})$ und für jedes festes h wenden wir Ascoli-Arzela-Satz an. 3. Abschloss für $q = 1$ und damit für $q < \frac{np}{n-p}$.)
Beweisidee für (d). Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\Gamma_0} = 0$ gilt o.B.d.A.

$$u(x_1, \cdots, x_n) = u(a_1, \cdots, x_n) + \int_{a_1}^{x_1} \partial_y u(y, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}y$$

mit $(a_1, \cdots, x_n) \in \Gamma_0$ und $u(a_1, \cdots, x_n) = 0$. Sei $d = \operatorname{diam}(\Omega)$. Höldersche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} |u(x_1, \cdots, x_n)| &\leqslant d^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_{a_1}^{a_1+d} |\partial_y u(y, x_2, \cdots, x_n)|^p \,\mathrm{d}y \Big)^{1/p} \\ \Longrightarrow \int_\Omega |u(x_1, \cdots, x_n)|^p \,\mathrm{d}x &\leqslant d^p \int_\Omega |\partial_{x_1} u(x_1, \cdots, x_n)|^p \,\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow \|u\|_{p;\Omega} &\leqslant d\|Du\|_{p;\Omega}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3. *Im Allgemeinen gilt* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow$(2.77) *ohne die Regularität-Voraussetzung (Lipschitzkeit) für das Gebiet.*
$W_0^{1,n}(\Omega)$*-Funktion liegt nicht unbedingt in* $L^\infty(\Omega)$ *sondern in sogenannt Orlicz-Raum* $L^\varphi(\Omega)$ *mit* $\varphi = \exp(|t|^{n/(n-1)}) - 1$.

2.2.2 Das schwache Randwertproblem und der Alternativensatz

Erinnere an die (klassische) Randaufgabe (2.59)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + \vec{b}\cdot\nabla u + cu = r & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} + \gamma u = 0 & \text{auf } \Gamma_1, \end{cases} \tag{2.84}$$

wobei $A(x) = (a^{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n \tag{2.85}$$

für eine positive Konstante $\lambda > 0$. Hier bezeichnet Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, wobei $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ ein abgeschlossener Grenzabschnitt ist und $\Gamma_1 = \partial\Omega\backslash\Gamma_0$. Die Funktion $\gamma : \Gamma_1 \mapsto \mathbb{R}$ ist gegeben und $\vec{\mu}(x) = A(x)\vec{\nu}(x)$ auf Γ_1. Die Funktion $r \in L^2(\Omega)$ ist gegeben.
Im Gegensatz zur starken Annahme der Hölder-Regularität von den Koeffizienten in (2.43) bzw. (2.45) im klassischen Rahmen nehmen wir hier nur

$$a^{ij},\ b^j,\ c\in L^\infty(\Omega) \quad i,j = 1,\cdots,n, \quad \gamma\in L^\infty(\Gamma_1). \tag{2.86}$$

Wir werden eigentlich die schwache Version (2.60) (die zwei Versionen sind eigentlich äquivalent für reguläre Lösungen $u \in C^2(\overline{\Omega})$ unter regulären Annahmen) von der Randaufgabe (2.84) im folgenden Hilbertraum lösen:

$$\begin{aligned} H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega) := W^{1,2}_{(\Gamma_0)}(\Omega) &= \overline{\{u\in C^1(\overline{\Omega})\,|\, u = 0 \text{ in einer Umgebung von } \Gamma_0\}}^{\|\cdot\|_{1,2;\Omega}} \\ &= \{u\in W^{1,2}(\Omega)\,|\, u|_{\Gamma_0} = 0\}, \end{aligned} \tag{2.87}$$

mit inneren Produkt

$$\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n}\langle D_j u, D_j v\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{2.88}$$

D.h. wir suchen $u \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ von der Gleichung

$$B[u,\varphi] = F[\varphi], \quad \forall\varphi\in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega), \tag{2.89}$$

wobei B eine Bilinearform und F ein lineares Funktional auf $H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ sind:

$$B[u,\varphi] := \int_\Omega \Big((\nabla u)^T A\nabla\varphi + \vec{b}\cdot\nabla u\varphi + cu\varphi\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1}\gamma u\varphi\,\mathrm{d}\sigma$$

$$F[\varphi] := \int_\Omega r\varphi \,\mathrm{d}x\,.$$

Wie im Rahmen der klassischen Lösungen haben wir eine eindeutige Lösung nur unter einer Positivitätsvoraussetzung (z.B. $c \geqslant 0$ für das Dirichlet-Problem in Satz 2.4), und im Allgemeinen gilt nur ein Alternativensatz (z.B. Satz 2.5).

Existenz und Eindeutigkeit im positiv definiten Fall Die strenge Ellipzität-Annahme (2.85) heißt, dass alle Eigenwerte von $A(x)$ größer als λ sind. Sei $\lambda_m(A(x)) \geqslant \lambda > 0$ kleinster Eigenwert von $A(x)$. Wir werden das Problem unter den folgenden Positivitätsvoraussetzungen betrachten:

$$\lambda_m(A(x)) \cdot c(x) - \frac{1}{4}|\vec{b}(x)|^2 \geqslant \delta_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega \text{ und } \gamma \geqslant 0 \text{ auf } \Gamma_1, \tag{2.90}$$

oder

$$\vec{b} = \vec{0}, \quad c \geqslant 0 \text{ auf } \Omega, \quad \sigma(\Gamma_0) > 0 \text{ und } \gamma \geqslant 0 \text{ auf } \Gamma_1. \tag{2.91}$$

Öffentlich liefert (2.90) $c > 0$ [13].
Das folgende Lax-Milgram-Lemma hilft, die eindeutige Lösung zu finden.

Lemma 2.6 (Lax-Milgram-Lemma)**.** *Sei H ein Hilbertraum mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und Norm $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Sei B eine Bilinearform auf H und F ein lineares Funktional auf H mit*

- *Beschränktheit von B: $|B[u,v]| \leqslant C\|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in H$,*
- *H-Ellipzität von B: $B[u,u] \geqslant c_0\|u\|^2$, $\forall u \in H$,*
- *Beschränktheit von F: $|F[u]| \leqslant K\|u\|$, $\forall u \in H$,*

wobei C, c_0, K drei positiven Konstanten bezeichnen. Dann hat das Problem

$$B[u,\varphi] = F[\varphi] \quad \forall \varphi \in H \tag{2.92}$$

eine eindeutige Lösung $u \in H$.

[23.06.2021]

[29.06.2021]

[13] (2.90) funktioniert für Poissongleichung schon nicht.

Beweis. Für jedes $u \in H$ ist $f_u := B[u, \cdot] : H \mapsto \mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional auf H mit

$$\|f_u\|_{H \mapsto \mathbb{C}} \leqslant C\|u\|.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz für beschränkte lineare Funktionale existiert ein eindeutiges $w_u \in H$ mit

$$f_u[v] = \langle w_u, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Wir definieren ein Operator

$$A : H \mapsto H \text{ mit } A[u] = w_u.$$

Da $\langle Au, v \rangle = \langle w_u, v \rangle = f_u[v] = B[u, v]$, ist A ein beschränkt linear Operator auf H mit $\|A\| \leqslant C$ und

$$\langle Au, u \rangle = B[u, u] = \overline{B[u, u]} = \overline{\langle Au, u \rangle} \geqslant c_0\|u\|^2.$$

Nach Riesz existeriert ein eindeutiges $w \in H$ mit

$$F[v] = \langle w, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Folglich ist das Problem (2.92) äquivalent zu

$$\langle Au, v \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v \in H,$$

also zu $Au = w$. Für beliebiges $a > 0$ ist $Au = w$ äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$u = Tu \text{ mit } T : H \mapsto H,\ Tu = u - a(Au - w).$$

Da für jedes $u_1, u_2 \in H$ und $u := u_1 - u_2 \in H$

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\|^2 &= \|u - aAu\|^2 = \|u\|^2 - a\langle u, Au \rangle - a\langle Au, u \rangle + a^2\|Au\|^2 \\ &\leqslant \left(1 - 2ac_0 + a^2C^2\right)\|u\|^2 \overset{a=\frac{c_0}{C^2}}{=} \left(1 - \frac{c_0^2}{C^2}\right)\|u_1 - u_2\|^2, \end{aligned}$$

ist T eine Kontraktionsabbildung. Es gibt dann einen eindeutigen Fixpunkt $u \in H$ von T, d.h. eine eindeutige Lösung $u \in H$ von (2.92). $\square$

Wir können dann jetzt das Randwertproblem (2.89) mit Hilfe von Lax-Milgram-Lemma lösen (im Vergleich mit Satz 2.4).

Satz 2.8 (Lösbarkeit des Randwertproblems)**.** *Sei* (2.85)-(2.86)-(2.90) *oder* (2.85)-(2.86)-(2.91). *Dann gibt es eine eindeutige (schwache) Lösung* $u \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ *von der Randaufgabe* (2.89).

Beweis. Es ist genug, die Voraussetzungen im Lax-Milgram-Lemma für in (2.89) definierte B, F und den Hilbertraum $H := H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ zu überprüfen.

- Beschränktheit von B: Für $u, v \in H = H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ gilt

$$
\begin{aligned}
|B[u,v]| &\leqslant \left|\int_\Omega \Big((\nabla u)^T A\nabla v + \vec{b}\cdot\nabla uv + cuv\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\Gamma_1} \gamma uv\,\mathrm{d}\sigma\right| \\
&\leqslant \underbrace{\|A\|_{\infty;\Omega}}_{:=\sup_{i,j=1,\cdots,n}\|a^{ij}\|_{\infty;\Omega}} \|u\|_{1,2;\Omega}\|v\|_{1,2;\Omega} + \underbrace{\|\vec{b}\|_{\infty;\Omega}}_{:=\sup_{j=1,\cdots,n}\|b^j\|_{\infty;\Omega}} \|u\|_{1,2;\Omega}\|v\|_{2;\Omega} \\
&\quad + \|c\|_{\infty;\Omega}\|u\|_{2;\Omega}\|v\|_{2;\Omega} + \|\gamma\|_{\infty;\Gamma_1}\|u|_{\Gamma_1}\|_{2;\Gamma_1}\|v|_{\Gamma_1}\|_{2;\Gamma_1} \\
&\leqslant C(\|A\|_{\infty;\Omega} + \|\vec{b}\|_{\infty;\Omega} + \|c\|_{\infty;\Omega} + \|\gamma\|_{\infty;\Gamma_1})\|u\|_H\|v\|_H \text{ mit (2.75).}
\end{aligned}
$$

- H-Ellipzität von B: Für $u \in H = H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ gilt es mit (2.85)-(2.86)-(2.90)

$$
\begin{aligned}
B[u,u] &= \int_\Omega \Big(\underbrace{(\nabla u)^T A\nabla u}_{\geqslant \lambda_m(A(x))|\nabla u|^2} + \underbrace{\vec{b}\cdot\nabla uu}_{\geqslant -|\vec{b}||\nabla u||u|} + cu^2\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1}\gamma u^2\,\mathrm{d}\sigma \\
&\geqslant \int_\Omega \begin{pmatrix}|\nabla u| & |u|\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_m(A) & -\frac{1}{2}|\vec{b}| \\ -\frac{1}{2}|\vec{b}| & c\end{pmatrix} \begin{pmatrix}|\nabla u| \\ |u|\end{pmatrix}\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant c_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2\,\mathrm{d}x = c_0\|u\|_H^2,
\end{aligned}
$$

wobei c_0 kleiner als den kleinsten Eigenwert der Matrix $\begin{pmatrix}\lambda_m(A) & -\frac{1}{2}|\vec{b}| \\ -\frac{1}{2}|\vec{b}| & c\end{pmatrix}$ ist:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\lambda_m + c - \sqrt{(\lambda_m - c)^2 + |\vec{b}|^2}\Big) = \frac{\lambda_m c - \frac{1}{4}|\vec{b}|^2}{\frac{1}{2}\Big(\lambda_m + c + \sqrt{(\lambda_m - c)^2 + |\vec{b}|^2}\Big)} \\
&\geqslant \frac{\delta_0}{\Lambda + \|c\|_{\infty;\Omega} + \|\vec{b}\|_{\infty;\Omega}} := c_0 \text{ mit der oberen Grenze der Eigenwerte von } A : \Lambda.
\end{aligned}
$$

Für $u \in H = H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ gilt es mit (2.85)-(2.86)-(2.91)

$$
\begin{aligned}
B[u,u] &= \int_\Omega \Big((\nabla u)^T A\nabla u + cu^2\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1}\gamma u^2\,\mathrm{d}\sigma \\
&\geqslant \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \geqslant c_0\|u\|_H^2 \text{ mit Poincarésungleichung (2.83).}
\end{aligned}
$$

- Beschränktheit von F: Für $u \in H = H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ gilt

$$|F[u]| \leqslant \|r\|_{2;\Omega}\|u\|_{2;\Omega} \leqslant \|r\|_{2;\Omega}\|u\|_H.$$

□

Bemerkung 2.4. *Das Problem* (2.89) *ist äquivalent zu*

$$\exists u \in H^1_{(\Gamma_0)} \text{ s.d. } B[u,\varphi] = F[\varphi], \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ mit } \varphi|_{\Gamma_0} = 0.$$

Übung: Mit Approximationsargument.

[29.06.2021]

[30.06.2021]

Alternativensatz Im Allgemeinen (d.h. ohne die Positivitätsbedingung (2.90) oder (2.91)) ist die bilinear Form B nicht benötigt $H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$-elliptisch. Wie Satz 2.5 gilt ein Alternativensatz für das Randwertproblem (2.89). Die Idee des Beweis ist ähnlich: Wir setzen

$$B^\sigma[u,v] := B[u,v] + \sigma[u,v]$$

mit evtl. größer Zahl $\sigma \gg 1$, s.d. B^σ die $H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$-Ellipzität erfüllt (im Vergleich mit in (2.56) definierter Operator L^σ).
Dazu brauchen wir die Gådingsche Ungleichung.

Lemma 2.7 (Gårding'sche Ungleichung)**.** *Sei* (2.85)-(2.86)*. Dann existieren Konstanten* $\lambda_0 > 0$ *und* $\sigma \in \mathbb{R}$ *mit*

$$B[u,u] \geqslant \lambda_0 \|u\|^2_{1,2;\Omega} - \sigma\|u\|^2_{2;\Omega}.$$

Beweis. Wir rechnen mit Hilfe von Young'sche Ungleichung und (2.75)

$$\begin{aligned} B[u,u] &= \int_\Omega \Big(\underbrace{(\nabla u)^T A \nabla u}_{\geqslant \lambda |\nabla u|^2} + \underbrace{\vec{b} \cdot \nabla u u}_{\geqslant -\|\vec{b}\|_{\infty;\Omega}|\nabla u||u|} + \underbrace{cu^2}_{\geqslant -\|c\|_{\infty;\Omega} u^2} \Big) \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \underbrace{\gamma u^2}_{\geqslant -\|\gamma\|_{\infty;\Gamma_1} u^2} \,\mathrm{d}\sigma \\ &\geqslant \underbrace{\Big(\lambda - \frac{1}{2}\|\vec{b}\|_{\infty;\Omega}\delta - 2\|\gamma\|_{\infty;\Gamma_1}\varepsilon^2\Big)}_{:=\lambda_0} \|\nabla u\|^2_{2;\Omega} - \underbrace{\Big(\frac{1}{2}\|\vec{b}\|_{\infty;\Omega}\frac{1}{\delta} + \|c\|_{\infty;\Omega} + 2\|\gamma\|_{\infty;\Gamma_1} C(\varepsilon)^2\Big)}_{:=\sigma - \lambda_0} \|u\|^2_{2;\Omega}, \end{aligned}$$

wobei δ, ε klein ausgewählt sind. □

Satz 2.9 (Alternativensatz für das Dirichlet-Problem der elliptischen PDGn in Divergenzform)**.** *Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ einem abgeschlossenen Grenzabschnitt und $\Gamma_1 = \partial\Omega\backslash\Gamma_0$. Die Funktion $\gamma : \Gamma_1 \mapsto \mathbb{R}$ ist gegeben.*
Sei B eine Bilinearform und F ein lineares Funktional auf $H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
B[u,\varphi] &:= \int_\Omega \Big((\nabla u)^T A \nabla\varphi + \vec{b}\cdot\nabla u\varphi + cu\varphi\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \gamma u\varphi\,\mathrm{d}\sigma \\
F[\varphi] &:= \int_\Omega r\varphi\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}
$$

wobei $A = (a^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix mit (2.85) *und die Koeffizienten $a^{ij}, b^j, c \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$.*
Es liegt genau einer der beiden Fälle vor:

1. *Das homogene Dirichlet-Problem*

$$B[u,\varphi] = 0 \ \text{in}\ \Omega, \quad \forall\varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega), \tag{2.93}$$

   hat nur die triviale Lösung in $H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$, und das inhomogene Dirichlet-Problem

$$B[u,\varphi] = F[\varphi], \quad \forall\varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega) \tag{2.94}$$

   hat für alle $r \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$.

2. *Das homogene Dirichlet-Problem* (2.54) *hat nichttriviale Lösungen, die einen endlichen dimensionalen Unterraum von $H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ bilden, und das inhomogene Dirichlet-Problem* (2.55) *ist nicht für alle $r \in L^2(\Omega)$ lösbar; wenn sie lösbar ist, dann nicht eindeutig.*

Beweis. Wir umschreiben das Problem (2.94) unten

$$B^\sigma[u,\varphi] = F[\varphi] + \sigma\langle u,\varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega), \tag{2.95}$$

wobei $B^\sigma[u,\varphi] = B[u,\varphi] + \sigma\langle u,\varphi\rangle$.
Wir überprüfen die Beschränktheit sowie die $H := H^1_{(\Gamma_0)}$-Ellipzität von B^σ wie im Beweis von Satz 2.8:

- Beschränktheit von B^σ: Für $u, v \in H = H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ gilt

$$|B^\sigma[u,v]| \leqslant C(\|A\|_{\infty;\Omega} + \|\vec{b}\|_{\infty;\Omega} + \|c\|_{\infty;\Omega} + \|\gamma\|_{\infty;\Gamma_1} + \sigma)\|u\|_H\|v\|_H$$

- H-Ellipzität von B^σ: Für $u \in H = H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ gilt es mit Lemma 2.7

$$B^\sigma[u,u] \geqslant \lambda_0\|u\|^2_H.$$

Mit Satz 2.8 gibt es eine eindeutige Lösung $u \in H$ des Problems

$$B^\sigma[u,\varphi] = \int_\Omega r\varphi \,\mathrm{d}x\,, \quad \forall \varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega),$$

wobei $r \in L^2(\Omega)$ gegeben ist, und wir bezeichnen diese Lösung wie

$$u = T^\sigma[r].$$

Wir überprüfen die Beschränktheit dieses linearen Operators $T^\sigma : L^2(\Omega) \mapsto H$:

$$\lambda_0 \|T^\sigma[r]\|_H^2 \leqslant B^\sigma[T^\sigma[r], T^\sigma[r]] \overset{\varphi = T^\sigma[r]}{=} \int_\Omega rT^\sigma[r]\,\mathrm{d}x \leqslant \|r\|_{2;\Omega}\|T^\sigma[r]\|_{2;\Omega} \leqslant \|r\|_{2;\Omega}\|T^\sigma[r]\|_H$$

$$\Rightarrow \|T^\sigma[r]\|_H \leqslant \lambda_0^{-1}\|r\|_{2;\Omega}.$$

Die Lösung des Problems (2.95) (d.h. (2.94)) ist dann äquivalent zu

$$u = T^\sigma[r + \sigma u] \in H \Leftrightarrow (\mathrm{Id} - \sigma T^\sigma)u = T^\sigma r \in L^2(\Omega).$$

Der Alternativensatz folgt dann aus dem Fredholm-Alternativensatz am Ende des Beweis von Satz 2.5, falls man die Kompaktivität des Operators

$$T^\sigma : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$$

überprüfen kann. Wir betrachten $T^\sigma : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ als

$$\mathrm{Id} \circ T^\sigma \text{ mit } T^\sigma : L^2(\Omega) \mapsto H \text{ und } \mathrm{Id} : H \mapsto L^2(\Omega),$$

und die Einbettung Id $: H \subset L^2(\Omega)$ ist kompakt: Es folgt aus Satz 2.7. □

2.2.3 Glattheit schwacher Lösung (Regularitätstheorie)

Mit glatter Daten (z.B. glattes Gebiet sowie glatte Koeffizienten und glatte Quellterme) ist die schwache Lösung glatter.

Satz 2.10 (Regularität schwacher Lösung unter starken Annahmen). *Sei*

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \|a^{ij}\|_{1,\infty;\Omega} + \sup{}_{1\leqslant j\leqslant n}\|b^j\|_{\infty;\Omega} + \|c\|_{\infty;\Omega} \leqslant \Lambda \tag{2.96}$$

mit (für eine positive Konstante $\lambda > 0$)

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega,\, \xi \in \mathbb{R}^n\,. \tag{2.97}$$

Sei $r \in L^2(\Omega)$.

(i) (Innere Regularität) Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Sei $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lösung der PDG

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \vec{b} \cdot \nabla u + cu = r \tag{2.98}$$

auf Ω, d.h.

$$B[u, \varphi] = F[\varphi], \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

wobei

$$\begin{aligned} B[u, \varphi] &= \int_\Omega \Big((\nabla u)^T A \nabla \varphi + \vec{b} \cdot \nabla u \varphi + cu\varphi \Big) \, \mathrm{d}x \, , \\ F[\varphi] &= \int_\Omega r\varphi \, \mathrm{d}x \, . \end{aligned}$$

Dann ist $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für jede Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ mit $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 0$ gilt die folgende Abschätzung

$$\|u\|_{2,2;\Omega'} \leqslant C(n, \lambda, \Lambda, d')(\|u\|_{1,2;\Omega} + \|r\|_{2;\Omega}). \tag{2.99}$$

(ii) (Globale Regularität) Sei Ω ein beschränktes C^2-Gebiet. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ des Dirichlet-Problems von (2.98) mit Nullrandbedingung , d.h.

$$B[u, \varphi] = F[\varphi], \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt die folgende Abschätzung

$$\|u\|_{2,2;\Omega} \leqslant C(n, \lambda, \Lambda, \Omega)(\|u\|_{2;\Omega} + \|r\|_{2;\Omega}). \tag{2.100}$$

Beweisidee. Wir betrachten den Differenzenquotient in der Richtung von $\vec{e_k}$:

$$\Delta_k^h u(x) := \frac{u(x + h\vec{e}_k) - u(x)}{h}, \quad 0 \neq h \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > |h|.$$

Es ist genug, die Abschätzung (2.99) für $\|\zeta \Delta_k^h Du\|_{2;\Omega}$ (mit $\zeta \in C_0^1(\Omega)$ und $|2h| < \operatorname{dist}(\operatorname{Supp}\zeta, \partial\Omega)$) überzuprüfen. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta_k^h (a^{ij} D_j u) D_i(\zeta^2 \Delta_k^h u) \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega (a^{ij} D_j u) \Delta_k^{-h} D_i(\zeta^2 \Delta_k^h u) \, \mathrm{d}x \\ &= B[u, \Delta_k^{-h}(\zeta^2 \Delta_k^h u)] - \int_\Omega (\vec{b} \cdot \nabla u + cu) \Delta_k^{-h}(\zeta^2 \Delta_k^h u) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \Big(r - \vec{b} \cdot \nabla u - cu \Big) \Delta_k^{-h}(\zeta^2 \Delta_k^h u) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\leqslant C\Big\| r - \vec{b}\cdot\nabla u - cu \Big\|_{2;\Omega} (\|\zeta\Delta_k^h Du\|_{2;\Omega} + \|u\|_{1,2;\Omega}).$$

Wir umschreiben den Terme links unten

$$\int_\Omega \big(a^{ij}(x+he_k)\Delta_k^h D_j u + \Delta_k^h a^{ij} D_j u(x+he_k)\big)\big(\zeta^2 D_i\Delta_k^h u + 2\zeta D_i\zeta\Delta_k^h u\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \underbrace{\int_\Omega a^{ij}(x+he_k)\Delta_k^h D_j u \zeta^2 D_i \Delta_k^h u\,\mathrm{d}x}_{\geqslant\lambda\|\zeta\Delta_k^h Du\|^2_{2;\Omega}} + \underbrace{\text{andere Terme}}_{\leqslant C\|A\|_{1,\infty;\Omega}\|\zeta\Delta_k^h Du\|_{2;\Omega}\|u\|_{1,2;\Omega}+C\|A\|_{1,\infty;\Omega}\|u\|^2_{1,2;\Omega}}$$

Höldersche Ungleichung liefert (2.99) für $\|\zeta\Delta_k^h Du\|_{2;\Omega}$.
Um die globale Abschätzung (2.100) zu beweisen, ist es genug, die Abschätzung für $\|\zeta\Delta_k^h Du\|_{2;D^+}$ zu überprüfen. Es ist klar für $1 \leqslant k \leqslant n-1$, und die Abschätzung für $D_{ij}u$ mit $(i,j) \neq (n,n)$ folgt. Die Abschätzung für $D_{nn}u$ folgt aus der Gleichung. □

Bemerkung 2.5.

- *Unter den Annahmen von Satz 2.10 gilt die PDG (2.98) punktweise fast überall in Ω. Und die schwache Lösung heißt dann starke Lösung der PDG.*
- *Unter stärkeren Annahmen (z.B. C^k-Gebiet, $a^{ij}, b^j, c \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$, $r \in H^{k-2}(\Omega)$, $k \geqslant 2$) können wir natürlich höhere Regularität ($H^k(\Omega)$) für die schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ beweisen.*

  Insbesondere ist $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ unter den Voraussetzungen von C^∞-Gebiet, $a^{ij}, b^j, c, r \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Damit ist u eigentlich eine klassische Lösung.

[30.06.2021]

[06.07.2021]

3 Eigenwertprobleme

In diesem Kapitel betrachten wir Eigenwertprobleme. Wir werden zuerst im Abschnitt 3.1 die Spektraltheorie symmetrischer kompakter Operatoren (siehe Satz 3.2) diskutieren, und werden den Alternativsatz für die (schwache) elliptische PDG $B[u, \varphi] = F[\varphi]$ erneut besuchen. Dann werden wir im Abschnitt 3.2 den abgeschlossenen selbstadjungierten Operatoren diskutieren, und insbesondere werden wir den unten Operator betrachten

$$H = L^2(\mathbb{R}), \quad D(A) = H^2(\mathbb{R}), \quad Au = -u''. \tag{A}$$

Im Abschnitt 3.3 werden wir die Spektraltheorie der Sesquilinearformen kurz vorstellen.
Wenn nicht anderes angegeben, nehmen wir in diesem Kapitel immer an:
Sei H separabler Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Sei $D(A) \subset H$ ein dichter Unterraum in H.
Sei $A : D(A) \mapsto H$ linearer Operator.

3.1 Spektraltheorie für kompakte symmetrische Operatoren

Eigenwerte und Eigenelemente symmetrischer Operatoren Sei H separabler Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Sei $D(A) \subset H$ ein dichter Unterraum in H.
Sei $A : D(A) \mapsto H$ linearer Operator.
Der Operator A heißt symmetrisch, wenn

$$\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in D(A). \tag{3.1}$$

Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A, wenn ein $\phi \in D(A)$ mit $\phi \neq 0$ existiert s.d. $A\phi = \lambda\phi$.
Ein solches ϕ heißt Eigenelement (bzw. Eigenfunktion falls H ein Funktionenraum ist) zum Eigenwert λ. Wir definieren $\mathrm{Eig}\,(\lambda) = \{\phi \in D(A) \mid A\phi = \lambda\phi\}$ den Eigenraum zu λ.
Ein Eigenwert λ von A hat die Vielfachheit $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, wenn λ genau m-mal in der Folge (λ_n) vorkommt (es existiert nur abzählbar viele Eigenwerte in einem separaten Hilbertraum, siehe Satz 3.1 unten).

Einer symmetrische Operator hat die folgende Eigenschaften.

Satz 3.1 (Eigenwerten eines symmetrischen Operators)**.** *Sei $A : D(A) \mapsto H$ ein linearer symmetrischer Operator. Dann gilt* *(a)* $\langle Au, u\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall u \in D(A)$*;*

(b) Alle Eigenwerte von A sind reell;

(c) Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal;

(d) Es gibt entweder keinen Eigenwert, oder es gibt ein (endliches oder abzählbar unendliches) Orthonormalsystem $(\phi_n)_n$ *von Elementen aus* $D(A)$ *und eine reelle Folge* (λ_n) *mit* $A\phi_n = \lambda_n\phi_n$*. Übrigens, falls* ψ *Eigenelement zum Eigenwert* μ*, gibt es* λ_n *mit* $\mu = \lambda_n$ *und*

$$\psi = \sum_{\lambda_n=\mu} \langle\psi, \phi_n\rangle\phi_n.$$

Beweis. (a) Mit der Symmetrie folgt $\langle u, Au\rangle = \langle Au, u\rangle$ für alle $u \in D(A)$, die zusammen mit $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ das Fakt $\langle Au, u\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall u \in D(A)$ liefert.

(b) Falls $A\phi = \lambda\phi$ mit $0 \neq \phi \in D(A)$, gilt dann $\lambda\langle\phi, \phi\rangle = \langle A\phi, \phi\rangle \in \mathbb{R}$, und damit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Falls $A\phi = \lambda\phi$ und $A\psi = \mu\psi$ mit $\lambda \neq \mu$ und $0 \neq \phi, \psi \in D(A)$, gilt dann

$$\lambda\langle\phi, \psi\rangle = \langle A\phi, \psi\rangle = \langle\phi, A\psi\rangle = \mu\langle\phi, \psi\rangle \Rightarrow \langle\phi, \psi\rangle = 0.$$

(d) Der Eigenraum $\operatorname{Eig}(\lambda)$ zu einem Eigenwert λ ist ein separabler Skalarproduktraum, und enthält daher eine Orthonormalbasis ONB (ϕ_n^λ), die auch eine ONB von $\overline{\operatorname{Eig}(\lambda)}$. Wir fassen alle diese ONB's zu einem Gesamt-Orthonormalsystem zusammen. Da H separable, besteht dieses ONS aus höchstens abzählbar vielen Gliedern (ϕ_n).

□

Bemerkung 3.1. *Falls das ONS in (d) eigentlich eine ONB von* H*, nennen wir* A *ein Operator mit reinem Punktspektrum. In diesem Fall gilt für alle* $f = \sum_n \langle f, \phi_n\rangle\phi_n \in D(A)$

$$Af = \sum_n \langle Af, \phi_n\rangle = \sum_n \langle f, \phi_n\rangle\lambda_n\phi_n = \sum_n \langle f, \phi_n\rangle A\phi_n.$$

Beispiele

- $H = \mathbb{C}^n$ und $A : H \mapsto H$ eine hermitesche Matrix.

- Wir erinnern uns an das Beispiel 1.5 am Ende von Kapitel 1: $H = L^2([0,1])$ und

$$A : D(A) = \{u \in C^2([0,1]) \,|\, u(0) = 0 = u(1)\} \mapsto H \text{ mit } Au = -u''.$$

  Der Operator A ist symmetrisch, und die Eigenwerten bzw. die entsprechende normalisierte Eigenfunktions von A sind

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad \phi_n = \sqrt{2}\sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

  Die folge $(\phi_n)_n$ bildet ONB von H.

- Nehmen wir

$$\begin{aligned}&H = L^2(0,\infty),\\&D(A) = C^2([0,\infty)) \cap H^2(0,\infty)\\&Au = -u''.\end{aligned}$$

  A ist nicht symmetrisch (Übung).

  Betrachten das Eigenwertproblem $Au = \lambda u$ d.h. $-u'' = \lambda u$ für $u \in D(A)$. Wir lösen diese gewöhnliche Gleichung in drei Fälle:

  – $\lambda > 0$: Die allgemeine Lösung lautet $c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Die Sinusfunktion sowie die Kosinusfunktion gehörten nicht $L^2(0,\infty)$, und damit ist $\lambda > 0$ kein Eigenwert von A.

  – $\lambda = 0$: Die allgemeine Lösung lautet $c_1 x + c_2$. Die lineare Funktion sowie die konstante Funktion gehörten nicht $L^2(0,\infty)$, und damit ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A.

  – $\lambda < 0$: Die allgemeine Lösung lautet $c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Die Funktion $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ gehört $L^2(0,\infty)$, und damit ist jedes $\lambda < 0$ Eigenwert von A (mit Eigenfunktion $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$).

- Betrachten wir

$$H = L^2(\mathbb{R}), \quad D(A) = H^2(\mathbb{R}), \quad Au = -u''. \tag{A}$$

  Dann ist A symmetrisch, aber es gibt keinen Eigenwert von A (Übung). Wir werden diesen Operator weiter im Abschnitt 3.2 studieren.

Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren Sei H separabler Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Sei $D(K) \subset H$ ein dichter Unterraum in H.
Sei $0 \neq K : D(K) \mapsto H$ linearer, symmetrischer und kompakter Operator (d.h. $\overline{K(\overline{B_1(0)})}$ ist kompakt in H).

Satz 3.2 (Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren)**.** *Sei $K : D(K) \mapsto H$ linearer, symmetrischer und kompakter Operator. Sei $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ abzählbar (endlich oder unendlich) viele reelle Eigenwerte von K mit $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant 0$ (nicht benötigt $\lambda_m \neq \lambda_n$, aber die Vielfachheit ist endlich) und sei $(\phi_n)_n \subset H$ die korrespondierte Eigenelemente mit $\|\phi_n\|_H = 1$ s.d.*

- *$K\phi_n = \lambda_n \phi_n$, $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{n,m}$ und*

$$|\lambda_n| = \sup \{ \frac{|\langle Ku, u \rangle|}{\langle u, u \rangle} \mid u \in \operatorname{span} \{\phi_1, \cdots, \phi_{n-1}\}^\perp, \, u \neq 0 \}.$$

- *$(\phi_n)_n$ ist eine ONB von $\overline{K(H)}$, d.h. $v = \sum_n \langle v, \phi_n \rangle \phi_n$ für alle $v \in \overline{K(H)}$. Insbesondere ist $(\phi_n)_n$ eine ONB von H, falls $K(H)$ dicht in H ist.*

Beweisidee. 1. Der Operator $I - K$ mit K kompakter Operator ist ein sogenannter Fredholm-Operator mit Index 0, d.h.

$$\dim \operatorname{Ker} (I - K) = \operatorname{codim} \operatorname{Ran}(I - K).$$

Jetzt betrachten wir den Operator $I - K/\lambda$ für $0 \neq \lambda \notin \sigma_p(K)$ d.h. $\operatorname{Ker} (I - K/\lambda) = \{0\}$, gilt es dann

$$\operatorname{Ran}(I - K/\lambda) = H \text{ d.h. } \lambda \in \rho(K).$$

Dies zeigt (eigentlich Fredholm-Alternativsatz mit $\lambda = 1$)

$$\sigma(K) \backslash \{0\} \subset \sigma_p(K).$$

Falls $0 \notin \sigma(K)$, existiert dann die stetige Inverse K^{-1} mit $\mathrm{Id} = K \circ K^{-1} : H \mapsto H$ ein kompakter Operator, d.h. $\dim (H) < \infty$ (damit ist 0 immer im Spektrum von K, falls H ein unendlich dimensionaler Raum ist).

2. 0 ist der einzige mögliche Häufungspunkt von $\sigma(K) \backslash \{0\}$.

   Falls $0 \neq \lambda \in \sigma_p(K)$, ist die Vielfachheit von λ endlich: $\dim \operatorname{Ker} (\lambda - K) < \infty$. Wir bezeichnen

$$n_\lambda = \max{}_n \{ n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Ker} ((\lambda - K)^{n-1}) \neq \operatorname{Ker} ((\lambda - K)^n) \} \in [1, \infty)$$

die Ordnung (oder Index) von λ, und die Riesz-Zerlegung gilt: $H = \mathrm{Ker}\,((\lambda - K)^{n_\lambda}) \oplus \mathrm{Ran}((\lambda - K)^{n_\lambda}) := N_\lambda \oplus R_\lambda$. Der Unterraum N_λ ist abgeschlossen, K-invariant und endlich-dimensional. Ist E_λ die Projektion auf N_λ, so gilt

$$E_\lambda E_\mu = \delta_{\lambda,\mu} E_\lambda \quad \forall \lambda, \mu \in \sigma(K) \backslash \{0\}.$$

$\square$

[06.07.2021]

[07.07.2021]

Eigenwertprobleme Erinnere an die RWA (2.84) sowie ihre schwache Formulierung (2.89).
Betrachte jetzt elliptische Eigenwertprobleme mit Randbedingung

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) + \vec{b} \cdot \nabla u + cu = \lambda w u & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} + \gamma u = 0 & \text{auf } \Gamma_1, \end{cases} \tag{3.2}$$

wobei $\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1, A, \vec{b}, c, \gamma$ wie in der RWA (2.84) sind, und

$$w \in C(\overline{\Omega}), \quad w > 0 \text{ auf } \overline{\Omega}, \tag{3.3}$$

eine positive gegebene Funktion. Wir nehmen

$$\vec{b} = 0,$$

und betrachte das (schwache) Eigenwertproblem

$$B[u, \varphi] = \lambda \langle u, \varphi \rangle_w \quad \forall \varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega), \tag{3.4}$$

wobei $B[u, \varphi] = B[\varphi, u]$ eine symmetrische Bilinearform auf $H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$:

$$B[u, \varphi] := \int_\Omega \Big((\nabla u)^T A \nabla \varphi + cu\varphi \Big)\,\mathrm{d}x \, + \int_{\Gamma_1} \gamma u \varphi \,\mathrm{d}\sigma\,,$$

und $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ ein Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$:

$$\langle u, v \rangle_w = \int_\Omega wuv \,\mathrm{d}x \;\text{ mit } \|u\|_w := \sqrt{\langle u, u \rangle_w}.$$

Wir bezeichnen den Hilbertraum $L^2(\Omega)$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ als

$$L^2_w(\Omega) = (L^2(\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_w). \tag{3.5}$$

Offensichtlich ist $\{f \in L^2(\Omega)\} = \{f \in L^2_w(\Omega)\}$, $L^2(\Omega) = L^2_1(\Omega)$ mit $w = 1$ und $\|u\|_w \sim \|u\|_{2;\Omega}$.
(Übung: Falls Ω einfach zusammenhängend und $\operatorname{rot}(A^{-1}\vec{b}) = 0$ s.d. $\exists \psi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mit $\nabla\psi = A^{-1}\vec{b}$, kann man (3.2) in

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla u) + \tilde{c}u = \lambda\tilde{w}u & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial\tilde{\mu}} + \tilde{\gamma}u = 0 & \text{auf } \Gamma_1, \end{cases} \tag{3.6}$$

transformieren, wobei $\tilde{f} = e^{-\psi}f$.)
Erinnere an den Beweis des Alternativensatz 2.9. Wir definieren ähnlich wie in (2.95)

$$B^\sigma_w[u,\varphi] = B[u,\varphi] + \sigma\langle u,\varphi\rangle_w, \tag{3.7}$$

s.d. mit $\|w\|_{\infty;\Omega} < \infty$ und größem σ

$$B^\sigma_w[u,u] = B[u,u] + \sigma\langle u,u\rangle_w \geqslant \lambda_0\|u\|^2_{1,2;\Omega}.$$

Nach Lax-Milgram-Lemma Lemma 2.6 existiert ein Operator (eigentlich linearer und beschränkter)

$$T^\sigma_w : L^2_w(\Omega) \mapsto H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega); r \mapsto u$$

wobei u die eindeutige schwache Lösung von

$$B^\sigma_w[u,\varphi] = \int_\Omega wr\varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall\varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega),$$

d.h.

$$B^\sigma_w[T^\sigma_w r,\varphi] = \langle r,\varphi\rangle_w \quad \forall r \in L^2_w(\Omega) \quad \forall\varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega).$$

Wir definieren

$$K = \mathrm{Id} \circ T^\sigma_w : L^2_w(\Omega) \mapsto L^2_w(\Omega).$$

Dann

- K ist ein kompakter Operator nach Satz 2.7.
- K ist ein symmetrischer Operator bzgl. dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$: Seien $r, s \in L^2_w(\Omega)$, gilt es dann

$$\begin{aligned}\langle Kr,s\rangle_w = \langle T^\sigma_w r,s\rangle_w = \langle s,T^\sigma_w r\rangle_w &= B^\sigma_w[T^\sigma_w s,T^\sigma_w r] \\ &= B^\sigma_w[T^\sigma_w r,T^\sigma_w s] = \langle r,T^\sigma_w s\rangle_w = \langle r,Ks\rangle_w.\end{aligned}$$

- 0 ist kein Eigenwert von K: Sei $r \in L^2_w(\Omega)$ mit $Kr = 0$, gilt es dann

  $$0 = B^\sigma_w[Kr, \varphi] = \langle r, \varphi \rangle_w \quad \forall \varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega) \Longrightarrow r = 0,$$

  da $H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ dicht in $L^2_w(\Omega)$ ist (Übung).

  Damit folgt die Dichtheit von $K(L^2_w(\Omega))$ in $L^2_w(\Omega)$: Sei $r \in L^2_w(\Omega)$ mit $\langle r, K\varphi \rangle_w = 0$ für alle $\varphi \in L^2_w(\Omega)$, gilt

  $$0 = \langle r, K\varphi \rangle_w = \langle Kr, \varphi \rangle_w \quad \forall \varphi \in L^2_w(\Omega) \Longrightarrow Kr = 0 \overset{0 \text{ kein EW von } K}{\Longrightarrow} r = 0.$$

Nach Satz 3.2 existieren abzählbar unendliche (beschränkten und nicht nulle) reelle Eigenwerten $(\nu_n)_n$ von K mit $\nu_n \to 0$, sowie die korrespondierte Eigenfunktionen $(\phi_n)_n$, die eine ONB von $L^2_w(\Omega)$ sind. Da

$$\phi_n = \frac{1}{\nu_n} K\phi_n \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega),$$

gilt

$$B^\sigma_w[\phi_n, \varphi] = \frac{1}{\nu_n} B^\sigma_w[K\phi_n, \varphi] = \frac{1}{\nu_n}\langle \phi_n, \varphi \rangle_w \quad \forall \varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega),$$
$$\text{und insbesondere } 0 < B^\sigma_w[\phi_n, \phi_n] = \frac{1}{\nu_n}\langle \phi_n, \phi_n \rangle_w = \frac{1}{\nu_n},$$

die nach der Definition (3.7) liefert

$$B[\phi_n, \varphi] = (\frac{1}{\nu_n} - \sigma)\langle \phi_n, \varphi \rangle_w \quad \forall \varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega),$$

d.h. $\phi_n \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert $(\frac{1}{\nu_n} - \sigma)$ des Eigenwertproblems $(*)$. Damit haben wir

Satz 3.3 (Lösung des Eigenwertproblems)**.** *Es existiert eine ONB $(\phi_n)_n$ von $L^2_w(\Omega)$ aus Eigenfunktionen $(\phi_n)_n \subset H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$ des Eigenwertproblems $(*)$. Die Eigenwertfolge $(\lambda_n)_n$ konvergiert gegen $+\infty$ und kann daher angeordnet werden: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \to +\infty$.*

Bemerkung 3.2 (Zurück zum Alternativensatz)**.** *Betrachte das (inhomogene) Eigenwertproblem*

$$B[u, \varphi] - \lambda\langle u, \varphi \rangle = \langle r, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega),$$

wobei B in $(*)$ definiert ist. Das jeweilige homogene Eigenwertproblem hat offenbar nichttriviale Lösungen genau dann, wenn $\lambda = \lambda_n (= \frac{1}{\nu_n} - \sigma)$ ein Eigenwert ist. D.h. das Randwertproblem

$$B^{\tilde{\sigma}}[u, \varphi] = F[\varphi] \quad \forall \varphi \in H^1_{(\Gamma_0)}(\Omega)$$

ist eindeutig lösbar für $\tilde{\sigma} \notin \Sigma$, wobei $\Sigma \subset \mathbb{R}$ eine abzählbar unendlich diskrete Menge. Insbesondere ist $0 \notin \Sigma$, falls die Positivitätsvoraussetzung (2.91) erfüllt wird.
Analog ist das Randwertproblem (Annahmen wie im Alternativensatz 2.5)

$$L^{\tilde{\sigma}}[u] = r \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega$$

eindeutig lösbar für $\tilde{\sigma} \notin \tilde{\Sigma}$, wobei $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}$ eine abzählbar unendlich diskrete Menge. Insbesondere ist $0 \notin \tilde{\Sigma}$, falls die Positivitätsvoraussetzung $c \geqslant 0$ erfüllt wird.

[07.07.2021]

[13.07.2021]

3.2 Eigenwertprobleme mit wesentlichem Spektrum

Wenn wir RWP/EWP auf einem unbeschränkten Gebiet (z.B. $\mathbb{R}^n$) betrachten, können wir auf Operatoren mit wesentlichem Spektrum (nicht mit reinem Punktspektrum wie 'kompakten Operatoren') stoßen.
Suche eine Lösung $u \in H^2(\mathbb{R})$ der ODE

$$u''(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.8}$$

Betrachte den Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$, und es gibt nur triviale Lösung in $L^2(\mathbb{R})$ für die homogene DG $u'' = 0$. Wir lösen jetzt explizit die inhomogene DG:

$$\begin{aligned}
&u''(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
&\Rightarrow u'(x) = \arctan(x) + u'(0) \\
&\Rightarrow u(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + u'(0)x + u(0) \notin L^2(\mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

D.h. die inhomogene DG ist nicht lösbar in $L^2(\mathbb{R})$, obwohl die homogene DG nur triviale Lösung hat - es gibt kein Alternativsatz der bisher bekannten Art. Wir werden sehen, obwohl die Zahl 0 zwar kein Eigenwert von $-u'' = \lambda u$ auf $L^2(\mathbb{R})$ ist, ist 0 im wesentlichen Spektrum von $-u''$ ($-u'' = \lambda u$ auf $L^2(\mathbb{R})$ hat keinen Eigenwert).

Abgeschlossene Operatoren Sei H separabler Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Sei $D(A) \subset H$ ein dichter Unterraum in H.
Sei $A : D(A) \mapsto H$ linearer Operator.
Der Operator A heißt abgeschlossen, wenn für jede Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n \to u$ in H und $Au_n \to v$ in H, gilt

$$u \in D(A) \text{ und } Au = v. \tag{3.9}$$

Der Operator A heißt abschließbar, wenn es einen abgeschlossenen Operator $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset H \mapsto H$ gibt mit

$$D(\tilde{A}) \supset D(A) \text{ und } \tilde{A}|_{D(A)} = A.$$

Ein abschließbarer Operator hat eine kleinste solche abgeschlossene Erweiterung $\bar{A}$ (d.h. $D(\bar{A})$ ist minimal unter allen abgeschlossenen Erweiterungen $\tilde{A}$ von A), die man Abschluss von A nennt.
Sei $A : D(A) \mapsto H$ abgeschlossen [14]. Die Menge

$$\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A-\lambda : D(A) \mapsto H \text{ ist bijektiv und beschränkt invertierbar}\} \tag{3.10}$$

heißt die Resolventenmenge von A. Ist $\lambda \in \varrho(A)$, heißt der beschränkte Operator $(A-\lambda)^{-1} : H \mapsto D(A) \subset H$ die Resolvente von A in λ. Die Menge

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A) \tag{3.11}$$

heißt Spektrum von A. Die Menge aller isolierten Eigenwerte von A mit endlicher Vielfachheit

$$\begin{aligned}\sigma_d(A) :=& \{\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \text{ mit endlicher Vielfachheit} \\ & \mid \exists \delta > 0 \text{ mit } \sigma(A) \cap B_\delta(\lambda) = \{\lambda\}\}\end{aligned} \tag{3.12}$$

heißt diskretes Spektrum von A. Die Menge

$$\sigma_{\text{ess}}(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$$

heißt wesentliches Spektrum von A.
Die abgeschlossene Operatoren A haben die folgende Eigenschaften (Übungen):

- $D(A) \subset H$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A ist beschränkt.
- Ist A invertierbar, ist $A^{-1} : H \mapsto D(A)$ abgeschlossen.
- $\operatorname{Ker}(A)$ ist ein Unterraum.

Insbesondere ist die Resolvente $(A-\lambda)^{-1} : H \mapsto D(A)$ von A in λ abgeschlossen und beschränkt.

[14] Man kann $\varrho(A)$ und $\sigma(A)$ auch für nicht abgeschlossene Operatoren genauso definieren. Dann gilt aber immer $\varrho(A) = \varnothing$ und $\sigma(A) = \mathbb{C}$

Beispiele (Übungen)

- $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(A) = C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $Au = -u''$. Dann ist A nicht abgeschlossen.
- Der in (A) definierte Operator A ist abgeschlossen.
- $H = L^2((0,1))$, $D(A_1) = H^1((0,1))$, $A_1 u = iu'$ und $D(A_2) = \{u \in H^1((0,1))\ u(0) = 0\}$, $A_2 u = iu'$.

  Dann sind $D(A_1), D(A_2)$ dicht in H und sind A_1, A_2 beide abgeschlossen. Aber
  $$\sigma(A_1) = \mathbb{C}, \quad \sigma(A_2) = \varnothing.$$
  (Hinweis: $\sigma(A_1) = \mathbb{C} \Leftrightarrow iu' - \lambda u = 0$ hat nichttriviale Lösung für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. $\sigma(A_2) = \varnothing \Leftrightarrow A_2 u - \lambda u = 0$ hat nur triviale Lösung und $A_2 u - \lambda u = r$ hat Lösung für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$)

Selbstadjungierte Operatoren Definiere

$$D(A^*) = \{u \in H \mid \exists w \in H \text{ mit } \langle Av, u\rangle = \langle v, w\rangle \quad \forall v \in D(A)\} \tag{3.13}$$

Für $u \in D(A^*)$ setze $A^*u = w$ (damit gilt $\langle Av, u\rangle = \langle v, A^*u\rangle$, $\forall v \in D(A)$, $u \in D(A^*)$). (Nach der Dichtheit von $D(A)$ in H ist es wohl definiert.) Wir haben die folgende elementare Fakten nach der Definitionen (Übungen):

- Ist A abschließbar, ist $D(A^*)$ dicht in H.
- A^* ist abgeschlossen.
- $\mathrm{Ker}\,(A^*) = \mathrm{Ran}(A)^\perp$.
- $A \subset B$ d.h. $D(A) \subset D(B)$ und $B|_{D(A)} = A \Rightarrow B^* \subset A^*$.
- $\mathrm{Ran}(B) \subset D(A) \Rightarrow B^*A^* \subset (AB)^*$.
- A ist symmetrisch $\Rightarrow A \subset A^*$ ist abschließbar und $\bar{A}$ ist symmetrisch.
- Ist A abschließbar, ist $\bar{A}^* = A^*$.
- Ist A abgeschlossen, gilt $\lambda \in \sigma(A^*) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A)$ und $\lambda \in \varrho(A^*) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \varrho(A)$.
- Sind $D(A), D(A^*)$ dicht in H, ist $A \subset A^{**}$ abschließbar und $\bar{A} = A^{**}$.

A heißt selbstadjungiert, wenn $A = A^*$ gilt, d.h. $D(A) = D(A^*)$ und $Au = A^*u$ für $u \in D(A)$. Dann ist ein selbstadjungierter Operator $A = A^*$ abgeschlossen.
A heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn A symmetrisch ist und $\bar{A}$ selbstadjungiert ist. Offensichtlich ist ein (wesentlich) selbstadjungierter Operator A symmetrisch, aber ist ein symmetrischer Operator auch (wesentlich) selbstadjungiert - es gibt Basiskriterien dafür (ohne Beweis[15]):

- Ist A symmetrisch, gilt dann (Basiskriterien für Selbstadjungiertheit)

$$\begin{aligned} & A \text{ selbstadjungiert} \\ & \Leftrightarrow A \text{ ist abgeschlossen und } \operatorname{Ker}(A^* \pm i) = \{0\} \\ & \Leftrightarrow \operatorname{Ran}(A \pm i) = H. \end{aligned}$$

- Ist A symmetrisch, gilt dann (Basiskriterien für wesentliche Selbstadjungiertheit)

$$\begin{aligned} & A^* \text{ symmetrisch} \\ & \Leftrightarrow A \text{ wesentllich selbstadjungiert} \\ & \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A^* \pm i) = \{0\} \\ & \Leftrightarrow \operatorname{Ran}(A \pm i) \text{ ist dicht in } H. \end{aligned}$$

[13.07.2021]

[14.07.2021]

Zurück zu (A): $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(A) = H^2(\mathbb{R})$, $Au = -u''$. Dann ist A symmetrisch und abgeschlossen. Wir zeigen, dass A wesentlich selbstadjungiert und damit selbstadjungiert ist.
Es ist genug, die Dichtheit von $\operatorname{Ran}(A \pm i)$ in H zu zeigen. Wir zeigen zwar

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ran}(A \pm i).$$

Sei $r \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit Träger in $[-M, M]$. Wir suchen eine Lösung in $D(A)$ von

$$(A \pm i)u = r \quad \text{ d.h. } -u'' \pm iu = r.$$

[15] Das (erste) von Neumann Formular zeigt, dass es für jeden abgeschlossenen symmetrischen Operatoren A gibt die folgende eindeutige Zerlegung für A^*:

$$f \in D(A^*) \Leftrightarrow f = g + h_+ + h_- \text{ mit } g \in D(A),\ h_\pm \in \operatorname{Ker}(A^* \pm i) \text{ und } A^*f = Ag - ih_+ + ih_-.$$

Sei $\nu_\pm = \dim \operatorname{Ker}(A^* \pm i) = \dim \operatorname{Ran}(A \mp i)^\perp$. Falls $\nu_+ = \nu_- = 0$, ist der abgeschlossenen symmetrischen Operator A selbstadjungiert (falls nicht abgeschlossen, dann wesentlich selbstadjungiert).

Das Fundamentalsystem der homogenen DGL $-u'' \pm iu = 0$ lautet

$$(e^{k_\pm x},\, e^{-k_\pm x}) \text{ mit } k_\pm = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} (k_\pm^2 = \pm i).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $-u'' \pm iu = r$ lautet

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + \frac{1}{2k}\int_0^x \big(-e^{k(x-y)} + e^{-k(x-y)}\big) r(y)\,\mathrm{d}y \quad k = k_\pm \\ &= \big(c_1 - \frac{1}{2k}\int_0^x e^{-ky} r(y)\,\mathrm{d}y\,\big)e^{kx} + \big(c_2 + \frac{1}{2k}\int_0^x e^{ky} r(y)\,\mathrm{d}y\,\big)e^{-kx}. \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{Re} k > 0$ ergibt sich als notwendige Bedingung für $u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{-ky} r(y)\,\mathrm{d}y\ = \frac{1}{2k}\int_0^M e^{-ky} r(y)\,\mathrm{d}y \text{ s.d. } \big(c_1 - \frac{1}{2k}\int_0^x e^{-ky} r(y)\,\mathrm{d}y\,\big) = 0 \text{ für } x \geqslant M, \\ c_2 &= -\frac{1}{2k}\int_0^{-\infty} e^{ky} r(y)\,\mathrm{d}y\ = \frac{1}{2k}\int_{-M}^0 e^{ky} r(y)\,\mathrm{d}y \text{ s.d. } \big(c_2 + \frac{1}{2k}\int_0^x e^{ky} r(y)\,\mathrm{d}y\,\big) = 0 \text{ für } x \leqslant -M. \end{aligned}$$

Dann gibt es eine eindeutige Lösung in $H^2(\mathbb{R})$

$$u(x) = \frac{1}{2k}\int_x^\infty e^{-ky} r(y)\,\mathrm{d}y\, e^{kx} + \frac{1}{2k}\int_{-\infty}^x e^{ky} r(y)\,\mathrm{d}y\, e^{-kx} \quad k = k_\pm$$

für die inhomogene DGL $-u'' \pm iu = r$ mit $r \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, d.h. $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ran}(A \pm i)$.
Analog kann man die Selbstadjungiertheit von der n-dimensionalen Verallgemeinerung des Operators $Au = -\Delta u$ für $u \in D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ überprüfen.

Spektralsatz für die selbstadjungierte Operatoren

Satz 3.4. *Sei $A : D(A) \subset H \mapsto H$ selbstadjungiert. Dann gilt*

(a) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

(b) Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

(c) Ist A positiv semidefinit (d.h. $\langle Au, u\rangle \geqslant 0$ für alle $u \in D(A)$), gilt $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

(d) Es gilt die folgende Charakterisierung des Spektrums von A

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists (u_n)_n \subset D(A) \text{ mit } \|u_n\| = 1 \text{ und } (A - \lambda)u_n \to 0. \quad (3.14)$$

Beweis. (Übung) Wir haben die folgende Identität für $\lambda = a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\|(A-\lambda)u\|^2 = \|(A-a)u\|^2 + b^2\|u\|^2 \quad u \in D(A). \tag{3.15}$$

Damit folgt $\lambda \in \varrho(A)$ mit $b = \operatorname{Im}\lambda \neq 0$ (d.h. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$) und

$$\|(A-\lambda)^{-1}\| \leqslant |b|^{-1}.$$

Ferner gilt für $\lambda = a \in \mathbb{R}^-$ und semidefinit positiver A

$$\|(A-a)u\|^2 = \|Au\|^2 - 2a\langle Au, u\rangle + a^2\|u\|^2 \geqslant a^2\|u\|^2,$$

die das Fakt $\sigma(A) \subset [0, \infty)$ liefert.
(d). $' \Rightarrow'$ Falls $\lambda \in \sigma(A)$ ein Eigenwert ist, wählen wir die Folge $u_n = u$ mit u die Einheits-Eigenfunktion zu λ aus, s.d. (3.14) gilt.
Falls $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ kein Eigenwert ist, gilt dann $\operatorname{Ker}(A-\lambda) = \{0\}$ und ist $(A-\lambda)$ nicht surjektiv. Dann gilt

- $\operatorname{Ran}(A-\lambda)$ ist dicht in H, aber nicht gleich H: $\operatorname{Ran}(A-\lambda)^\perp = \operatorname{Ker}(A^*-\lambda) = \operatorname{Ker}(A-\lambda) = \{0\}$.
- Der Operator $(A-\lambda)^{-1} : \operatorname{Ran}(A-\lambda) \mapsto D(A)$ existiert und ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.

Wir wählen $v_n \in \operatorname{Ran}(A-\lambda)$ mit $\|v_n\| = 1$ und $\|(A-\lambda)^{-1}v_n\| \to \infty$ aus. Wir setzen

$$u_n = \frac{(A-\lambda)^{-1}v_n}{\|(A-\lambda)^{-1}v_n\|} \in D(A).$$

$' \Leftarrow'$ Falls $\lambda \in \varrho(A)$, ist $(A-\lambda)^{-1} : H \mapsto D(A)$ beschränkt:

$$\|(A-\lambda)^{-1}u\| \leqslant C\|u\|.$$

Für alle $v \in D(A)$ gilt dann (mit $u = (A-\lambda)v$)

$$\|v\| \leqslant C\|(A-\lambda)v\|.$$

Damit existiert keine Folge (v_n) in $D(A)$ mit (3.14). □

Bemerkung 3.3 (Im Vergleich mit Bemerkung 3.2)**.** *Nach dem Beweis von (d) gibt es für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ drei Fälle (mit einem selbstadjungierten Operator A):*

(i) $\lambda \in \varrho(A)$, d.h. $A-\lambda : D(A) \mapsto H$ ist bijektiv und $(A-\lambda)^{-1} : H \mapsto D(A) \subset H$ ist beschränkt.

(ii) $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ *ist ein Eigenwert, d.h.* $(A-\lambda) : D(A) \mapsto H$ *ist nicht injektiv und daher* $\mathrm{Ran}(A-\lambda)$ *ist nicht dicht in* H *(da* $\mathrm{Ran}(A-\lambda)^\perp = \mathrm{Ker}\,(A^* - \bar{\lambda}) = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda)$*).*

(iii) $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ *ist kein Eigenwert, dann ist* $(A-\lambda) : D(A) \mapsto H$ *injektiv und ist* $\mathrm{Ran}(A-\lambda)$ *dicht in* H *(aber nicht gleich* H *und nicht beschränkt).*

[14.07.2021]

[20.07.2021]

Zurück zu (A): $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(A) = H^2(\mathbb{R})$, $Au = -u''$. Dann ist A ein selbstadjungierter Operator, und hat A keinen Eigenwert. Wir zeigen

$$\sigma(A) = [0, \infty).$$

Da $\langle Au, u\rangle = \int_{\mathbb{R}} -u''\bar{u}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |u'|^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ für alle $u \in H^2(\mathbb{R})$, gilt $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Sei $\lambda \in [0,\infty)$. Wir suchen eine Folge $(u_n)_n$ in $H^2(\mathbb{R})$ mit $\|u_n\|_{2;\mathbb{R}} = 1$ und $\|(A-\lambda)u_n\|_{2;\mathbb{R}} \to 0$.
Sei $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\chi(x) = 1$ in $|x| \leqslant 1$ und $\chi(x) = 0$ für $|x| \geqslant 2$. Setze

$$\chi_n = \chi(\frac{\cdot}{n}), \quad v_n = \chi_n(x)e^{-i\sqrt{\lambda}x}, \quad u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}.$$

Offensichtlich ist $u_n \in H^2(\mathbb{R})$ mit $\|u_n\| = 1$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\|(A-\lambda)u_n\| &= \frac{1}{\|v_n\|}\|(A-\lambda)v_n\| \\
&= \frac{1}{\|\chi_n\|}\left\|(-\chi_n''(x) + 2i\sqrt{\lambda}\chi_n')e^{-i\sqrt{\lambda}x}\right\| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}\|\chi\|}\left\|-\frac{1}{n^2}\chi''(\frac{x}{n}) + 2i\sqrt{\lambda}\frac{1}{n}\chi'(\frac{x}{n})\right\| \leqslant C(\lambda)/n \to 0.
\end{aligned}$$

Wir kommen zurück zu ODE (3.8): Suche $u \in D(A)$ für die DGL $Au = -\frac{1}{1+x^2}$, d.h. $(A-0)u = -\frac{1}{1+x^2}$. Da $0 \in \sigma(A)$ kein Eigenwert ist (Fall (iii)), ist $\mathrm{Ran}(A-0)$ dicht (aber nicht gleich) in $L^2(\mathbb{R})$. Da die ODE nur triviale Lösung hat, gilt $\frac{1}{1+x^2} \in L^2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{Ran}(A)$.

3.3 Sesquilinearformen und deren Spektraltheorie

Wegen der Vorteile schwacher Formulierung des RWP möchten wir jetzt Sesquilinearformen (statt Operatoren) betrachten.
Sei H ein Hilbertraum. Sei $D(B) \subset H$ linearer Unterraum.

Falls $D(B) \subset H$ dicht ist und B die übliche Sesquilinearitätseigenschaft (d. h. linear im ersten Argument und semilinear im zweiten Argument[16]) besitzt, heißt

$$B : D(B) \times D(B) \mapsto \mathbb{C}$$

dichte definierte Sesquilinearform mit Definitionsbereich $D(B)$.
Falls

$$B[u,v] = \overline{B[v,u]} \quad \forall u, v \in D(B),$$

heißt B symmetrisch.
Ist B nicht (notwendig) symmetrisch, wird

$$B^*[u,v] = \overline{B[v,u]} \text{ mit } D(B^*) = D(B)$$

die zu B adjungierte Sesquilinearform genannt.
Falls

$$B[u,u] \geqslant 0 \quad \forall u \in D(B),$$

heißt B positiv semidefinit.

Sei B eine dicht definierte, symmetrische, positiv semidefinite Sesquilinearform.
Setze

$$\langle u, v\rangle_b = B[u,v] + \langle u, v\rangle_H \quad u, v \in D(B), \tag{3.16}$$

dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ ein Innerprodukt in $D(B)$, d. h.

$$(D(B), \langle \cdot, \cdot \rangle_b)$$

ist ein Prähilbertraum (nicht notwendig (vollständig) Hilbertraum).
Eine Folge $(u_n) \subset D(B)$ heißt B-konvergent gegen $u \in H$ (in Zeichen $u_n \overset{B}{\to} u$), falls

$$u_n \to u \text{ in } H, \quad B[u_n - u_m, u_n - u_m] \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Falls für jede Folge $(u_n) \subset D(B)$ B-konvergent gegen $u \in H$ folgt

$$u \in D(B), \quad B[u_n - u, u_n - u] \to 0,$$

heißt B abgeschlossen.

Lemma 3.1. *Sei B eine dicht definierte, symmetrische, positiv semidefinite Sesquilinearform. Dann gilt*

$$B \text{ ist abgeschlossen } \Leftrightarrow (D(B), \langle \cdot, \cdot \rangle_b) \text{ ist Hilbertraum.}$$

[16] Wir haben im Abschnitt 1.5 stattdessen Semilinearität im ersten Argument und Linearität im ersten Argument gefordert. Dieser Unterschied ist jedoch rein formaler Natur.

Beweis. Es folgt nach

$$B[u_n - u_m, u_n - u_m] = \|u_n - u_m\|_b^2 - \|u_n - u_m\|_H^2.$$

"⇒" Sei B abgeschlossen, und sei (u_n) Cauchy-Folge in $(D(B), \langle\cdot,\cdot\rangle_b)$. Dann gilt

$$\|u_n - u_m\|_H^2 = \|u_n - u_m\|_b^2 - B[u_n - u_m, u_n - u_m] \overset{B \text{ positiv semidefinit}}{\leqslant} \|u_n - u_m\|_b^2 \to 0$$

$\Rightarrow u_n \to u$ in H

$\Rightarrow u_n \overset{B}{\to} u$

$\Rightarrow u \in D(B), \quad B[u_n - u, u_n - u] \to 0, \quad \|u_n - u\|_b \to 0$

$\Rightarrow (D(B), \langle\cdot,\cdot\rangle_b)$ ist Hilbertraum.

"⇐" Sei $(D(B), \langle\cdot,\cdot\rangle_b)$ vollständig und $(u_n) \subset D(B)$ B-konvergent gegen $u \in H$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\|u_n - u_m\|_b^2 = \|u_n - u_m\|_H^2 + B[u_n - u_m, u_n - u_m] \to 0 \\ &\Rightarrow \|u_n - u\|_b \to 0, \quad u \in D(B) \\ &\Rightarrow B[u_n - u, u_n - u] = \|u_n - u\|_b^2 - \|u_n - u\|_H^2 \to 0. \end{aligned}$$

□

Satz 3.5 (Charakterisierung der Sesquilinearformen durch Operatoren)**.** *Sei B eine dicht definierte, abgeschlossene, symmetrische, positiv semidefinite Sesquilinearform. Dann existiert ein dicht definierter, selbstadjungierter, positiv semidefiniter Operator $A : D(A) \subset H \mapsto H$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $D(A) \subset D(B)$ und

$$B[u, v] = \langle Au, v\rangle \quad \forall u \in D(A), \quad v \in D(B).$$

(b) Falls $u \in D(B)$, $w \in H$ mit

$$B[u, v] = \langle w, v\rangle \quad \forall v \in D(B),$$

gilt dann $u \in D(A)$ und $Au = w$.

Beweis. 1. Da B abgeschlossen ist, ist $(D(B), \langle\cdot,\cdot\rangle_b)$ Hilbertraum. (Analog wie im Beweis von Lax-Milgram-Lemma) Für jedes $u \in H$ ist durch

$$f_u : D(B) \mapsto \mathbb{C}, \quad v \mapsto \langle u, v\rangle_H$$

ein beschränktes lineares Funktional auf $(D(B), \langle\cdot,\cdot\rangle_b)$:

$$|f_u[v]| = |\langle u, v\rangle_H| \leqslant \|u\|_H \|v\|_H \leqslant \|u\|_H \|v\|_b.$$

Nach Riesz'schen Darstellungssatz existiert genau ein $w_u \in D(B)$ mit

$$f_u[v] = \langle w_u, v\rangle_b = \langle u, v\rangle_H \quad \forall v \in D(B).$$

Dies definiert einen Operator

$$T : H \mapsto D(B), \quad u \mapsto w_u \text{ mit } \langle u, v\rangle_H = \langle Tu, v\rangle_b \quad \forall v \in D(B).$$

[20.07.2021]

[21.07.2021]

Der Operator T ist linear, injektiv, beschränkt und $\mathrm{Ran}(T)$ ist dicht in H:

- Sei $Tu = 0$ für $u \in H$. Dann gilt $0 = \langle Tu, v\rangle_b = \langle u, v\rangle_H$ für alle $v \in D(B)$. Da $D(B)$ dicht in H ist, folgt $u = 0$.
- Da

  $$\|Tu\|_H^2 \leqslant B[Tu, Tu] + \|Tu\|_H^2 = \langle Tu, Tu\rangle_b = \langle u, Tu\rangle_H \leqslant \|u\|_H \|Tu\|_H,$$

  ist T beschränkt mit Norm kleiner als 1.
- Sei $u \in \mathrm{Ran}(T)^{\perp_H}$. Da $D(B)$ dicht in H, existiert Folge $(u_n) \subset D(B)$ mit $u_n \to u$ in H. Wir rechnen

  $$\begin{aligned} 0 &= \langle Tu_n, u\rangle = \langle Tu_n, u_n\rangle + \langle Tu_n, u - u_n\rangle \\ &= \overline{\langle u_n, Tu_n\rangle} + \langle Tu_n, u - u_n\rangle \\ &= \overline{\langle Tu_n, Tu_n\rangle_b} + \langle Tu_n, u - u_n\rangle \\ &= B[Tu_n, Tu_n] + \langle Tu_n, Tu_n\rangle + \langle Tu_n, u - u_n\rangle. \end{aligned}$$

  Da $B[Tu_n, Tu_n] \geqslant 0$, $\langle Tu_n, Tu_n\rangle \geqslant 0$ und

  $$|\langle Tu_n, u - u_n\rangle| \leqslant \|Tu_n\| \|u - u_n\| \to 0,$$

  gilt $\|Tu_n\| \to 0$, und damit $\|Tu\| = 0$, $Tu = 0$. Deshalb folgt $u = 0$ nach der Injektivität von T. Die Menge $\mathrm{Ran}(T)$ ist dicht in H.

2. Wir definieren

$$D(A) = \mathrm{Ran}(T), \quad Au = T^{-1}u - u.$$

Dann folgt $D(A) \subset D(B)$ und für jedes $w \in D(A)$ und $v \in D(B)$ gilt

$$\langle Aw, v\rangle = \langle T^{-1}w, v\rangle - \langle w, v\rangle = \langle w, v\rangle_b - \langle w, v\rangle = B[w, v].$$

Sei $u \in D(B)$, $w \in H$ mit $B[u, v] = \langle w, v\rangle$ für alle $v \in D(B)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\langle u, v\rangle_b = B[u, v] + \langle u, v\rangle = \langle w + u, v\rangle \quad \forall v \in D(B)\\ &\Rightarrow u = T(w + u) \in \mathrm{Ran}(T) = D(A) \text{ und } Au = T^{-1}u - u = T^{-1}T(w + u) - u = w.\end{aligned}$$

3. A ist positiv semidefinit: Für alle $u \in D(A)$ gilt

$$\langle Au, u\rangle = B[u, u] \geqslant 0.$$

A ist symmetrisch: Für alle $u, v \in D(A)$ gilt

$$\langle Au, v\rangle = B[u, v] = \overline{B[v, u]} = \overline{\langle Av, u\rangle} = \langle u, Av\rangle.$$

Damit ist $A + \mathrm{Id}$ symmetrisch, und

$$T = (A + \mathrm{Id}\,)^{-1} : H \mapsto D(A)$$

ist bijektiv und symmetrisch. Da $D(T) = H$, ist T selbstadjungiert. Damit ist $A + \mathrm{Id}\, : D(A) \mapsto H$ selbstadjungiert: Für alle $u \in D(A^*) = D((A + \mathrm{Id}\,)^*)$, d. h. $\exists v \in H$ mit $\langle u, (A + \mathrm{Id}\,)w\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $w \in D(A + \mathrm{Id}\,)$, gilt

$$\begin{aligned}&\langle u, r\rangle = \langle u, (A + \mathrm{Id}\,)(A + \mathrm{Id}\,)^{-1}r\rangle = \langle v, (A + \mathrm{Id}\,)^{-1}r\rangle, \quad \forall r \in H\\ &\Rightarrow u = (A + \mathrm{Id}\,)^{-1}v \in D(A)\\ &\Rightarrow D(A^*) = D(A).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.4. *Sei B eine dicht definierte, abgeschlossene, symmetrische, positiv semidefinite Sesquilinearform.*
Die schwache Formulierung des RWP

$$u \in D(B) \text{ von } B[u, \varphi] = \langle r, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in D(B)$$

ist äquivalent zur starken Formulierung des RWP:

$$u \in D(A) \text{ von } Au = r.$$

Die schwache Formulierung des EWP

$$u \in D(B) \text{ von } B[u,\varphi] = \lambda\langle u,\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in D(B) \tag{$*$}$$

ist äquivalent zur starken Formulierung des EWP:

$$u \in D(A) \text{ von } Au = \lambda u. \tag{3.17}$$

Wir definieren die Resolventenmenge $\varrho(A)$/Spektrum $\sigma(A)$ vom EWP (3.17) *als die Resolventenmenge $\varrho(*)$/Spektrum $\sigma(*)$ vom EWP $(*)$.*
Nach Bemerkung 3.3 ergeben sich folgend drei Fälle für das EWP

$$\text{Suche } u \in D(B) \text{ mit } B[u,\varphi] - \lambda\langle u,\varphi\rangle = \langle r,\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in D(B)$$

(i) *$\lambda \in \varrho(*)$ von $B[u,\varphi] = \lambda\langle u,\varphi\rangle$ $\forall \varphi \in D(B)$: Das homogene Problem hat nur die triviale Lösung, und das inhomogene Problem ist für alle $r \in H$ eindeutig lösbar.*

(ii) *$\lambda \in \sigma(*)$ ist kein Eigenwert: Das homogene Problem hat nur die triviale Lösung, und das inhomogene Problem ist nicht für alle $r \in H$ lösbar; wenn doch, dann nicht eindeutig.*

(iii) *$\lambda \in \sigma(*)$ ist ein Eigenwert: Das homogene Problem hat nichttriviale Lösungen, und die Menge der $r \in H$, für die das inhomogene Problem lösbar ist, ist nicht dicht in H; jede Lösung des homogenen Problems ist in ihrem Orthogonalkomplement.*

Beispiel
Sei $\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$0 < \underline{\varepsilon} \leqslant \varepsilon \leqslant \overline{\varepsilon} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Sei $H = L^2(\mathbb{R}^n;\varepsilon)$ Vektorraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Skalarprodukt

$$\langle u,v\rangle_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon(x)u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x .$$

Sei $D(B) = H^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$B[u,v] = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x .$$

Dann ist B dicht definiert, symmetrisch und positiv semidefinit. Da

$$\langle u,v\rangle_b = B[u,v] + \langle u,v\rangle_\varepsilon = \langle \nabla u,\nabla v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \langle u,v\rangle_\varepsilon$$

eine zur H^1-Norm äquivalente Norm erzeugt, ist $(D(B), \langle\cdot,\cdot\rangle_b)$ ein Hilbertraum. Damit ist B abgeschlossen. Nach Satz 3.5 existiert eine eindeutige bestimmter selbstadjungierter Operator L_ε, der B repräsentiert:

$$\langle L_\varepsilon u, v\rangle_\varepsilon = B[u,v] \quad \forall u \in D(L_\varepsilon), \quad \forall v \in D(B).$$

Wir möchten den Operator L_ε explizit formulieren. Sei $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Wir rechnen für $v \in D(B)$

$$B[u,v] = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x \;= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \overline{v}\,\mathrm{d}x \;= \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta u\Big)\overline{v}\,\mathrm{d}x \;= \langle -\frac{1}{\varepsilon}\Delta u, v\rangle_\varepsilon.$$

D.h. $u \in H^2(\mathbb{R}^n) \subset D(L_\varepsilon)$ und $L_\varepsilon u = -\frac{1}{\varepsilon}\Delta u$.
Sei $u \in D(B)$ und $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$B[u,v] = \langle w, v\rangle_\varepsilon \quad \forall v \in D(B),$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x \;= \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon w \overline{v}\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Damit existiert $-\Delta u$ im schwachen Sinne mit

$$-\Delta u = \varepsilon w \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

und $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. D.h. $D(L_\varepsilon) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$. Dies folgt $D(L_\varepsilon) = H^2(\mathbb{R}^n)$ und $L_\varepsilon u = -\frac{1}{\varepsilon}\Delta u$.

Literatur

[1] R. Adams, Sobolev Spaces. Academic Press, 1975.

[2] H.W. Alt, Lineare Funktionalanalysis. Springer-Lehrbuch.

[3] L.C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics Vol. 19. Amerian Mathematical Society, 2nd Edition, 2010.

[4] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, 1998.

[5] M. Plum, Skript zur „Rand- und Eigenwertproblem“ am KIT, Sommersemester 2013.

[6] G. Teschl, Ordinary differential equations and dynamical systems. American Mathematical Society. 2012. `https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/index.html`