Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Rand- und Eigenwertprobleme – Sommersemester 2011
Beispiel 3 zu schwachen Ableitungen

Ein paar Integrale: Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a \le |x| \le b\}$ mit $0 \le a < b$ (eine Kugel bzw. eine Kugelschale). Dann gilt für $i, j = 1, \ldots, n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$(I1) \qquad \int_A |x|^\gamma x_i^2 \, dx = \int_A |x|^\gamma x_j^2 \, dx = \frac{1}{n} \int_A |x|^{\gamma+2} \, dx.$$

Steht anstatt x_i^2 nur $|x_i|$ so gilt wegen $|x| \le |x_1| + \ldots + |x_n| \le \sqrt{n}|x|$

$$(I2) \qquad \int_A |x|^\gamma |x_i| \, dx = \int_A |x|^\gamma |x_j| \, dx = \frac{1}{n} \int_A |x|^\gamma \sum_{i=1}^n |x_i| \, dx \begin{cases} \le \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_A |x|^{\gamma+1} \, dx, \\ \ge \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_A |x|^{\gamma+1} \, dx. \end{cases}$$

Ähnliches gilt für Oberflächenintegrale $\oint_{\partial A} |x|^\gamma x_i^2 \, do$ bzw. $\oint_{\partial A} |x|^\gamma |x_i| \, do$.

Zwei Lemmata zur schwachen Ableitung:

Lemma B.1 *Ist $\partial_i u = v$ auf Ω im Sinn schwacher Ableitungen, dann ist auch $\partial_i u = v$ auf Ω_0 im Sinn schwacher Ableitungen falls $\Omega_0 \subset \Omega$.*

Grund: $C_c^\infty(\Omega_0) \subset C_c^\infty(\Omega)$.

Lemma B.2 *Ist $u \in C^1(\Omega)$ dann besitzt u schwache partielle Ableitungen $\partial_i u$ auf Ω, die mit den klassischen partiellen Ableitungen übereinstimmen.*

Nun das eigentliche Beispiel: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u : x \mapsto |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$ (für $\alpha < 0$ ist u nur fast überall auf $\mathbb{R}^n$ definiert). Die klassische Ableitung lautet $\partial_i u(x) = \alpha |x|^{\alpha-2} x_i$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. In der Vorlesung wurde bereits gezeigt:

Lemma B.3 *Für $\alpha > 1 - n$ gilt $\partial_i u = \alpha |x|^{\alpha-2} x_i$ auf $\mathbb{R}^n$ im Sinn schwacher Ableitungen.*

Etwas Klärungsbedarf gab es noch bei folgendem Resulat:

Lemma B.4 *Für $\alpha \le 1 - n$ besitzt u keine schwache Ableitung auf $\mathbb{R}^n$ (keine schwache Ableitung auf Ω falls $0 \in \Omega$).*

Beweis 1: (Nach Zuruf aus dem Publikum). Sei $\epsilon > 0$ und $D_\epsilon = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\epsilon}(0)$. Auf D_ϵ ist u eine C^1-Funktion, hat also nach Lemma B.2 auch eine schwache Ableitung und es gilt

$$\partial_i u = \alpha |x|^{\alpha-2} x_i \text{ auf } D_\epsilon \text{ im schwachen Sinn.}$$

Angenommen u besitzt eine schwache Ableitung v auf $\mathbb{R}^n$ bzgl. der x_i-Richtung. Dann gilt (Eindeutigkeit der schwachen Ableitung sowie Lemma B.1)

$$v = \alpha|x|^{\alpha-2}x_i \text{ auf } D_\epsilon$$

Da $\bigcup_{\epsilon>0} D_\epsilon = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ folgt

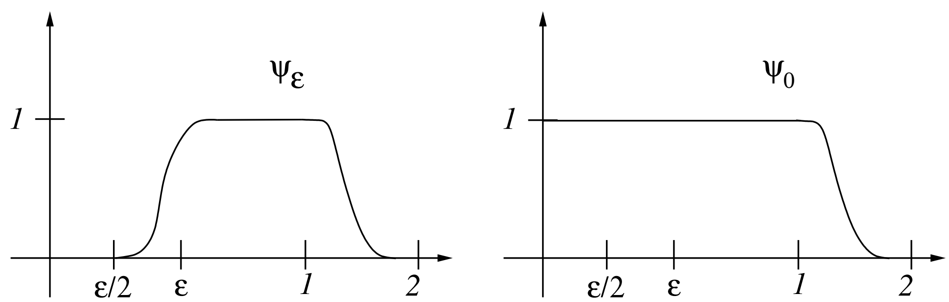
$$v = \alpha|x|^{\alpha-2}x_i \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Damit ist die schwache partielle Ableitung gefunden. Aber: für $\alpha \leq 1-n$ ist $\alpha|x|^{\alpha-2}x_i$ nicht in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, vgl. (I2). Widerspruch.

Beweis 2: (Hier nur für $\alpha < 1-n$; der Fall $\alpha = 1-n$ ist ähnlich). Angenommen u besitzt eine schwache Ableitung v auf $\mathbb{R}^n$ in Richtung x_i. Wir konstruieren eine Testfunktion, die eingesetzt in die Definition der schwachen Ableitung einen Widerspruch erzeugt.

Wahl von ϕ_ϵ: Sei $\epsilon > 0$ und $\psi_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \psi_\epsilon \leq 1$ und $\psi_\epsilon \equiv 1$ auf dem Interval $[\epsilon, 1]$ und $\operatorname{tr}\psi_\epsilon = [\frac{\epsilon}{2}, 2]$. Dann definiert man

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{x_i}{|x|}\psi_\epsilon(|x|).$$



Man sieht: $\phi_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{tr}\phi_\epsilon = A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\epsilon}{2} \leq |x| \leq 2\}$. Nun berechnen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \partial_i \phi_\epsilon \, dx = \int_{A_\epsilon} |x|^\alpha \partial_i \phi_\epsilon \, dx = \underbrace{-\int_{A_\epsilon} \alpha |x|^{\alpha-2} x_i \phi_\epsilon \, dx}_{=:I_\epsilon}.$$

Wir schätzen I_ϵ nach unten ab:

$$I_\epsilon = \underbrace{(-\alpha)}_{\geq 0} \int_{A_\epsilon} |x|^{\alpha-3} x_i^2 \psi_\epsilon(|x|)\, dx \geq (-\alpha) \int_{\epsilon \leq |x| \leq 1} |x|^{\alpha-3} x_i^2 \, dx = \frac{(-\alpha)}{n} \int_{\epsilon\leq|x|\leq 1} |x|^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{-\alpha\omega_n}{n} \int_\epsilon^1 r^{\alpha-1+n-1}\, dr = \text{const.} + \frac{\alpha\omega_n}{n(\alpha+n-1)}\epsilon^{\alpha+n-1} \to \infty \text{ für } \epsilon \to 0,$$

da $\alpha < 1-n$.

Angenommen u hat eine schwache Ableitung v in Richtung x_i: Dann gilt

$$\infty = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \partial_i \phi_\epsilon \, dx = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} v\phi_\epsilon \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} v \frac{x_i}{|x|}\psi_0(|x|)\, dx < \infty,$$

ein Widerspruch (beim letzten Gleichheitszeichen wurde der Satz über dominierte Konvergenz und die Beschränktheit der Funktion $\frac{x_i}{|x|}\psi_0(|x|)$ verwendet). Dabei ist ψ_0 der skizzierte punktweise Limes der Funktionen ψ_ϵ für $\epsilon \to 0$.