Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

SS 2011

Rand- und Eigenwertprobleme
1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Es sei $f \in C[0,1]$. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-u'' = f \quad \text{in } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

die eindeutige Lösung $u(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t)\, dt$ besitzt, wobei

$$G(x,t) = \begin{cases} (1-x)t, & 0 \le t \le x \le 1, \\ (1-t)x, & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

b) Es sei $f \in C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-u'' - u = f \quad \text{in } \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

die eindeutige Lösung $u(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) f(t)\, dt$ besitzt, wobei

$$G(x,t) = \begin{cases} \cos(x)\sin(t), & 0 \le t \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \sin(x)\cos(t), & 0 \le x \le t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Lösungen des Eigenwertproblems

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = u'(0),\ u(1) = u'(1).$$

Aufgabe 3

Es sei $p \in C^1[0,1]$ eine positive Funktion, $r \in C[0,1]$ und $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)u'(x)\right) = r(x) \quad \text{in } (0,1), \qquad u'(0) = \eta_0,\ u'(1) = \eta_1$$

genau dann lösbar ist, wenn gilt

$$(*) \qquad \int_0^1 r(x)\, dx = -p(1)\eta_1 + p(0)\eta_0.$$

Finden Sie in diesem Fall eine explizite Formel für die Lösung(en) des Problems. Ist die Lösung eindeutig?

Besprechung in der Übung am 20.4.2011