Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
10. Übungsblatt

Aufgabe 35

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in W^{1,2}(\Omega)$. Weiter sei $\Omega' \subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 0$. Zeigen Sie, dass für die schwache Lösung u von $-\Delta u = f$ in Ω gilt: $u \in W^{3,2}(\Omega')$ und es existiert ein $C = C(\Omega, \Omega')$ mit

$$\|\partial_i u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \le C \left(\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 36

Beweisen Sie das Lemma von Féjer-Schur: Sind A, B symmetrische und positiv semidefinite Matrizen, so gilt $\operatorname{Spur}(AB) \ge 0$. Zeigen Sie außerdem, dass AB i.a. nicht positiv semidefinit ist.

Aufgabe 37

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ erfülle

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) \le 0 & \text{in } \Omega \\ u(x) \le 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Geben Sie ein Beispiel für Ω, u und c an, so dass $\max_{\overline{\Omega}} u > 0$.

Aufgabe 38

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und L der aus der Vorlesung bekannte gleichmäßig elliptische Differentialoperator in Nichtdivergenzform mit beschränkten Koeffizientenfunktionen a_{ij}, b_i, c $(i, j = 1, \ldots, n)$.

a) Zeigen Sie: Falls eine Funktion $h \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ existiert mit $Lh > 0$ in Ω und $h > 0$ in $\overline{\Omega}$, so gilt:

$$\text{(A)} \qquad \left[u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ Lu \le 0 \text{ in } \Omega,\ u \le 0 \text{ auf } \partial\Omega \right] \implies u \le 0 \text{ in } \Omega$$

Hinweis: Betrachten Sie $u - \mu_0 h$ wobei $\mu_0 = \inf\{\mu > 0 : \ u - \mu h \le 0 \text{ in } \overline{\Omega}\}$ und zeigen Sie durch Widerspruch $\mu_0 = 0$.

b) Es sei $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 < x_1 < d\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass die Aussage (A) gilt, falls d genügend klein ist.

Besprechung in der Übung am 29.6.2011